

Recreación del tensor de impedancia magnetotelúrico desde un escalar

Enrique Gómez Treviño*

Departamento de Geofísica Aplicada, División de Ciencias de la Tierra, CICESE

Ensenada, Baja California, México. 22860

*egomez@cicese.mx

Resumen

El tensor de impedancias es el dato básico de cualquier levantamiento magnetotelúrico. Consiste en cuatro números complejos por cada frecuencia. En tres dimensiones (3D) se necesitan los cuatro, en dos dimensiones (2D) solamente dos y en una dimensión (1D) solamente uno. Sin embargo, para su cálculo a partir de las mediciones se requiere suponer que el subsuelo es 3D desde el principio. La reducción de dimensiones viene después procediendo de forma deductiva de lo general a lo particular. Esto es muy práctico a la hora de interpretar los datos, pero no hace justicia a la parte creativa de cómo se llega a idear un concepto nuevo como lo fue en su momento el tensor de impedancias. De hecho, el tensor fue la solución a las contrariedades que presentaba la versión 1D o escalar. En este trabajo partimos de la versión histórica escalar e inferimos de forma inductiva dos tensores hipotéticos candidatos a resolver el problema 3D, y evaluamos su desempeño utilizando campos con polarizaciones elípticas aleatorias. El que resulta empíricamente inmune a la polarización se convalida teóricamente con las propiedades de homogeneidad y superposición de las ecuaciones de Maxwell. Se evidencia que los elementos del tensor solo dependen de la distribución de resistividad del subsuelo, como se ha supuesto desde siempre, y como tendría que ser.

Palabras Claves: Polarización, Tensor de impedancias, Magnetotelúrico.

Introducción

El método magnetotelúrico de exploración geofísica propuesto por Cagniard (1953) fue concebido como un método escalar, en el sentido de que el resultado de las mediciones es un número. Específicamente, un número complejo que representa la impedancia obtenida como la razón del campo eléctrico al magnético, ambos de la misma frecuencia. La necesidad de utilizar tensores no es porque la resistividad en el subsuelo sea un tensor, sino porque un campo incidente en una dirección produce corrientes no solo en esa dirección, sino también perpendicularmente debido a anomalías laterales de resistividad eléctrica como pueden ser los accidentes topográficos. Una sola componente del campo eléctrico y otra del campo magnético no son suficientes para captar el fenómeno de inducción electromagnética en la tierra.

El problema de una onda plana incidiendo sobre un semi-espacio homogéneo es relativamente simple. Para mediados del siglo XX ya existían innumerables soluciones de las ecuaciones de Maxwell para situaciones mucho más complicadas, como las planteadas por las antenas de radio. La tarea de proponer el método magnetotelúrico era más cuestión de imaginación que de conocimiento. También influyó la necesidad de superar la profundidad de penetración de los sondeos de corriente continua. La figura 1 muestra el planteamiento: dos ecuaciones diferenciales de las más simples, cuyas soluciones son funciones exponenciales.

Las expresiones para los campos E_x y H_y en la frontera se muestran en la Figura 2. Ambos dependen linealmente del campo incidente E^i_x ; debatiremos sobre este tipo de relación más adelante en el caso general de 3D. Por ahora cabe señalar que el campo incidente no se conoce;

todo lo que sabemos son los campos que se miden en la frontera tierra-aire. Para cancelar esta dependencia conviene tomar razones de

los campos. La convención es dividir el eléctrico por el magnético resultando con unidades de impedancia.

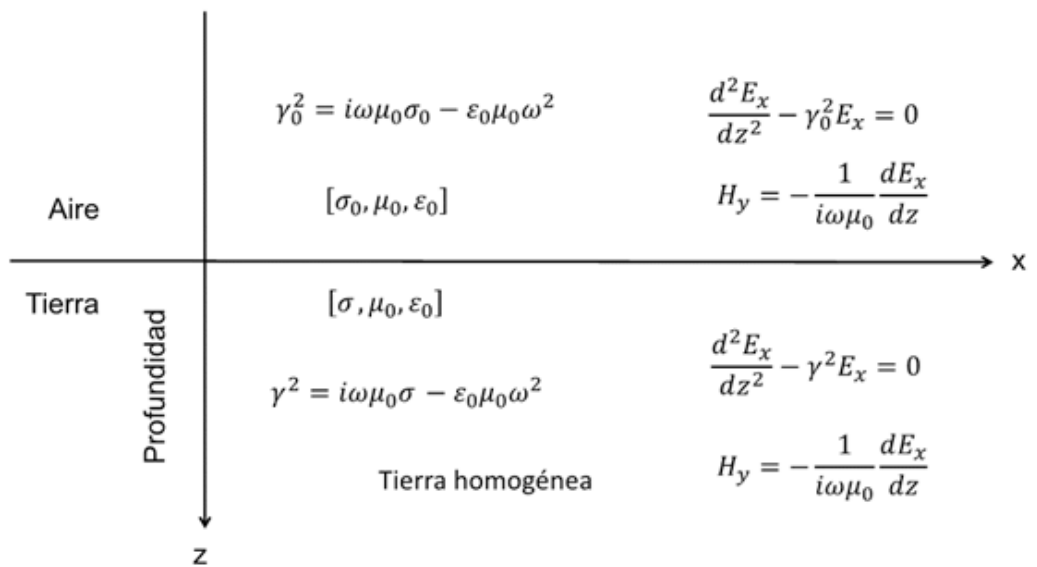


Figura 1. El problema de valor en la frontera que plantea Cagniard (1953). Cada medio tiene su constante de propagación. Estas son γ_0 para el aire y γ_1 para la tierra; μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y ϵ_0 la permitividad eléctrica también del vacío. El aire y la tierra comparten estas cantidades, pero difieren en su conductividad eléctrica σ . La frecuencia angular se representa como ω . Las ecuaciones diferenciales difieren de un medio al otro solo en las constantes de propagación.

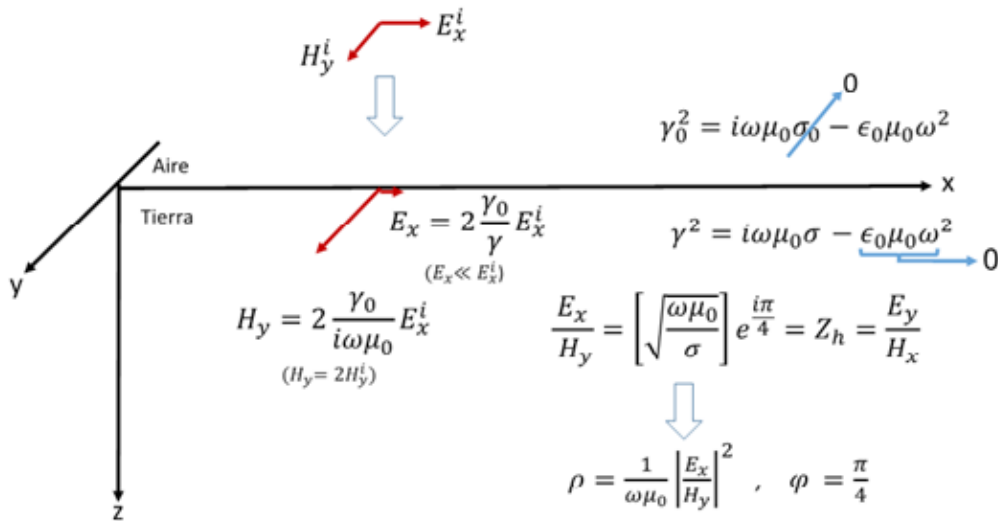


Figura 2. Se muestra la solución de los campos eléctricos y magnéticos en la frontera tierra-aire. El resultado principal es que la razón del campo eléctrico al magnético es independiente de la polarización de los campos.

Como antecedente del método magnetotelúrico, cabe mencionar el método telúrico, en el cual se miden simultáneamente campos eléctricos en lugares relativamente distantes. Para neutralizar la dependencia del campo incidente se normalizan las mediciones con respecto a una de las estaciones. Dividir por el campo magnético hace eso mismo y mucho más, sin contar con que le antepuso su nombre al método telúrico, pasó de llamarse telúrico a magneto-telúrico. De los valores relativos del campo eléctrico no se puede inferir la resistividad del subsuelo, pero sí de la razón del eléctrico al magnético. En la aproximación cuasi-estática ($\epsilon_0\mu_0\omega^2=0$), perfectamente válida en geofísica, se obtiene la conocida fórmula de la resistividad aparente.

Aunque el método escalar resultó impráctico, dejó un legado en términos de rigor que trascendió a la modalidad tensorial. Implícito en la razón de campos está la inmunidad de la impedancia con respecto a la polarización de los campos. En lo que sigue ilustramos esta independencia partiendo de series de tiempo simuladas. En la Figura 3 se muestran series de E_x y H_y de 7 s de duración compuestas por 7 segmentos de 1 s cada uno. En cada segmento se define una función coseno cuya amplitud y fase cambian de segmento a segmento aleatoriamente. Se puede observar que hay segmentos con mayor amplitud que otros, pero ambos campos varían

proporcionalmente. De hecho, los eléctricos en la gráfica se multiplicaron por un factor de 180 para que sea más fácil identificar la proporcionalidad entre ambas curvas. Se puede observar también que hay una diferencia de fase que se mantiene constante al cambiar de segmento.

Implícitamente se supone que estas series de tiempo son simultáneas, en el sentido que los campos se corresponden en el tiempo, como se hace en campo. No tiene sentido, y sería absurdo, procesar series de tiempo tomadas a diferentes horas o en diferentes días. Precisamente lo que se desea es obtener impedancias que no dependan de los campos, los cuales cambian de amplitud a cada momento, por lo que hay que compensar con los campos del mismo segmento.

La suma de dos componentes perpendiculares de un mismo campo que varía en el tiempo en forma sinusoidal describe una elipse en el espacio. La orientación y la forma de la elipse dependen de las amplitudes relativas y de las diferencias de fase. La componente H_y del campo magnético se muestra en negro en la Figura 3. La componente perpendicular H_x no se muestra aquí, pero tiene un comportamiento similar. Las variaciones aleatorias producen la variedad de elipses que se muestran en la Figura 4. El objetivo es ilustrar que las impedancias escalares E_x/H_y no dependen de las diferentes polarizaciones.

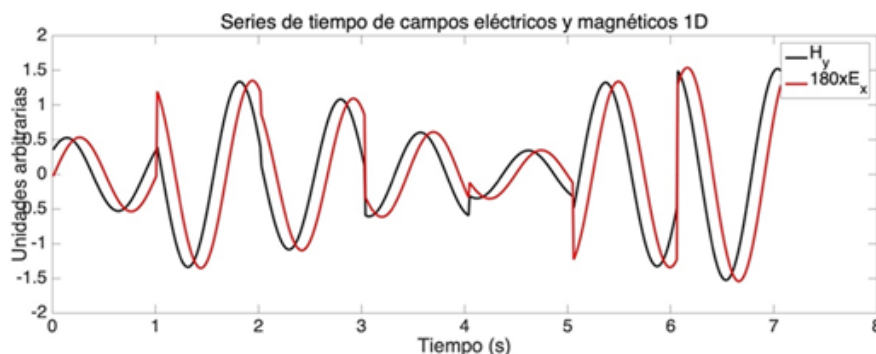


Figura 3. Series de tiempo simuladas utilizando funciones coseno con amplitudes y fases aleatorias. El periodo de las funciones es de 1 s. Se muestran siete segmentos de 1 s de duración cada uno. Los campos corresponden a un medio homogéneo.

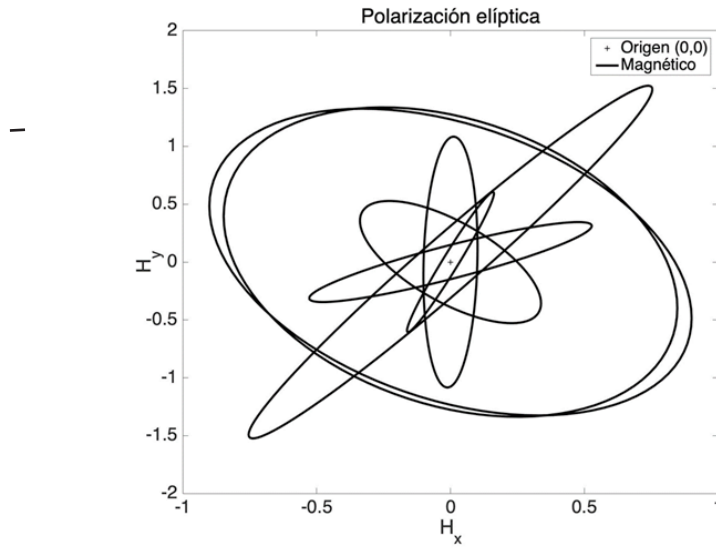


Figura 4. Elipses de polarización del campo magnético de las series de tiempo de la Figura 1. Las dos componentes tienen amplitudes y fases aleatorias.

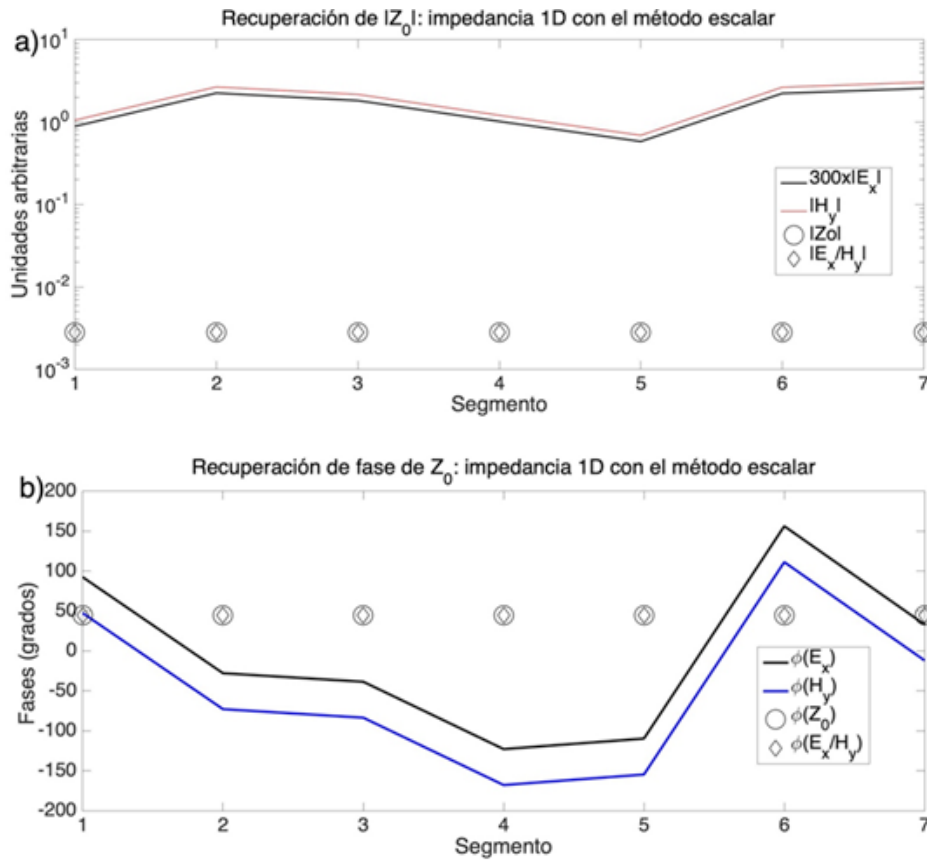


Figura 5. a) Magnitudes de los campos eléctricos y magnéticos para los siete segmentos. La razón de los campos no depende de la polarización. b) Fases de los campos eléctricos y magnéticos para los siete segmentos. La diferencia de fases no depende de la polarización.

En la Figura 5a se muestran las variaciones aleatorias de la magnitud de los campos eléctricos y magnéticos para los diferentes segmentos. La comparación entre los dos se facilita multiplicando al campo eléctrico por 300. Se puede observar que la separación entre las curvas es uniforme, lo cual, por tratarse de escala logarítmica, indica que el factor entre una y otra es el mismo independientemente del segmento. Lo mismo pasa con las fases aleatorias en la escala lineal en la Figura 5b. Se puede observar que la magnitud de la impedancia verdadera representada por círculos negros se recupera exactamente independientemente del segmento. Lo mismo pasa con la fase. Esto no hace sino confirmar que en 1D dividir el campo eléctrico por el magnético efectivamente elimina el efecto de la polarización, como era de esperarse en el caso ideal.

Sería ingenuo pensar que podemos resolver las ecuaciones de Maxwell en 3D y encontrar expresiones explícitas para las impedancias como las de 1D. Debemos buscar otros caminos. Sin importar a dónde se llegue, se debe exigir que las impedancias dependan solo de la distribución de resistividades en el subsuelo. Hay que cuidar, en particular, que no dependan de la polarización de los campos porque esta depende de la de los incidentes, y estos no se conocen. Reiterando, debemos asegurarnos que lo que vamos eventualmente a transformar en imágenes del subsuelo dependa solamente de la distribución de resistividades.

Ni en la versión original de Cantwell (1960) ni en los artículos posteriores en los que se recrea la derivación, como en los de Weidelt y Chave (2012) y Gómez-Treviño *et al.* (2013) se plantea cómo se puede pasar de 1D a 3D de una manera lógica. Tampoco se dice explícitamente ni se explica cómo es que los elementos del tensor dependen solo de la distribución de resistividades del subsuelo. La tradición es suponer relaciones lineales entre los campos y establecer el tensor eliminando los campos incidentes. Las

suposiciones son correctas, por supuesto, pero no se les da seguimiento en cuanto a justificarlas formalmente desde las ecuaciones de Maxwell. En el presente trabajo las suposiciones se abordan desde primeros principios, nada se da por sentado.

Estrategia tensorial 1

Hay una gran diferencia entre buscar nuevos caminos a ciegas y seguir un indicio por simple que este sea. En nuestro problema tenemos como indicio los resultados en 1D. En este caso no hay dirección preferencial en el sentido que la razón E_x/H_y es igual a la razón E_y/H_x . Ambas representan la impedancia Z_h de la que se obtiene la fórmula de resistividad. Un solo número no necesita de una representación matricial o tensorial. Sin embargo, podemos hacer el ejercicio y expresar artificialmente el análisis 1D de la forma

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z_h \\ Z_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}, \quad Z_h = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x}. \quad (1)$$

Si esta es la versión 1D de una pretendida fórmula general para 3D, se esperaría que en la diagonal hubiera valores diferentes de cero, y que los de la anti diagonal fueran diferentes entre sí. La fórmula más simple que cumple con estos criterios es

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}, \quad Z_{ij} = \frac{E_i}{H_j}. \quad (2)$$

La ecuación 1 representa lo que se sabe para el caso 1D. Por su parte, la ecuación 2 representa una inferencia inductiva que se propone como hipótesis para 3D, la cual no necesariamente es cierta.

En lo que sigue se aplican a la ecuación 2 campos derivados de series de tiempo que simulan condiciones 3D. En general, en medios 3D el campo magnético varía mucho menos que el campo eléctrico de lugar a lugar y de periodo a periodo. De hecho, en el caso 1D el campo magnético no varía de periodo a periodo, es siempre el doble del incidente. Esto justifica que en la Figura 6 utilicemos la misma serie de tiempo para el campo magnético que se utilizó en los ejemplos anteriores. La línea roja

simula el campo eléctrico. En este caso se les sumó a los segmentos de la serie de tiempo 1D otras funciones coseno con amplitud y fase aleatorias, simulando el desvío de corriente. Se puede observar que de segmento a segmento no existe la regularidad del caso 1D. Veamos si la generalización representada en la ecuación 2 cumple con las expectativas de que las razones de los campos no dependen de la polarización. A esta primera generalización en lo que sigue se le llamará tensorial 1.

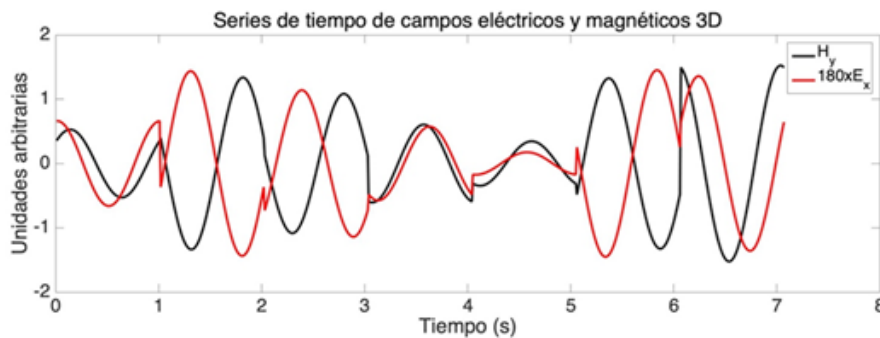


Figura 6. Series de tiempo de campos eléctricos y magnéticos. Los magnéticos son iguales a los de la Figura 3 pero no los eléctricos. A los eléctricos de la Figura 3 se les agregó otra serie de amplitud relativamente pequeña pero también aleatoria en amplitud y fase. Con eso se simula la intromisión en la componente x de parte del campo perpendicular debido a desviaciones laterales de corriente.

Se muestran solo las impedancias Z_{xy} . Se puede observar en la Figura 7a que las amplitudes de los campos eléctricos y magnéticos ya no son en cada segmento paralelas entre sí. La máxima separación se observa en el segmento 5, que accidentalmente coincide con el mínimo de ambas magnitudes. Como en el caso escalar lo que importa es la separación. En la Figura 7a los símbolos de diamante identificadas como tensorial 1 representan impedancias calculadas con la ecuación 2. Se puede observar que las impedancias correspondientes dependen del segmento y por lo tanto de la polarización. Lo mismo pasa con las fases en la Figura 7b. Tenemos entonces que en situaciones 3D la razón de campos eléctricos a magnéticos depende de la

polarización de los campos. En otras palabras, el tensor de la ecuación 2 no es una generalización viable porque no cumple con el estándar que puso el método escalar. Seguramente el lector se habrá dado cuenta desde que se planteó la ecuación 2, que esta opción es simplemente cuatro métodos escalares ordenados como un tensor.

La estrategia 2 es otra cosa según veremos en la próxima sección. Por lo pronto hay que señalar que reproduce exactamente la impedancia verdadera, y que la estimación es independiente de la polarización de los campos. Esto es un adelanto al desarrollo del tensor, pero se incluye aquí para contrastar con la simple razón de componentes individuales.

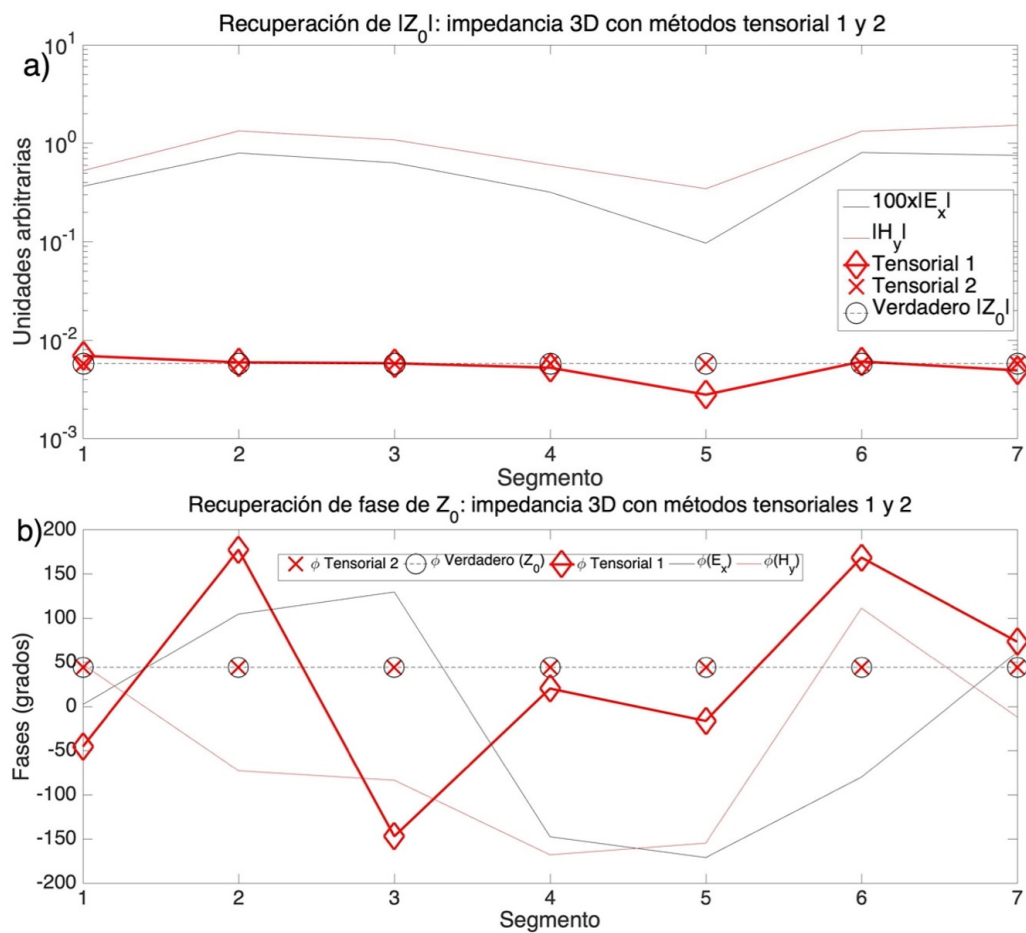


Figura 7. a) Magnitud de los campos eléctricos y magnéticos de las series de la Figura 6. Las curvas ya no son paralelas segmento a segmento. La máxima separación está en el segmento 5 y se refleja en la curva de la impedancia como un mínimo en la estrategia tensorial 1. b) Las correspondientes fases de los campos. De nuevo las curvas dejan de ser paralelas y la estimación de la fase es incorrecta en la estrategia tensorial 1. En ambas figuras se incluyen las estimaciones de la estrategia tensorial 2 representadas con cruces rojas.

En la Figura 7a las curvas de los campos son casi paralelas resultando que seis de las siete impedancias estimadas con la estrategia tensorial 1 son casi iguales a las verdaderas. La Figura 8 muestra el contraste entre las dos estrategias para 20 segmentos en lugar de solo 7 de la figura anterior. Casi no hay segmentos paralelos en las curvas de los campos eléctricos y magnéticos, por lo que las impedancias dependen de la polarización según se muestra explícitamente

con los símbolos de diamante, tanto en las magnitudes como en las fases. También se puede observar que las cruces rojas, los de la estrategia tensorial 2, caen exactamente sobre los círculos negros, los valores verdaderos.

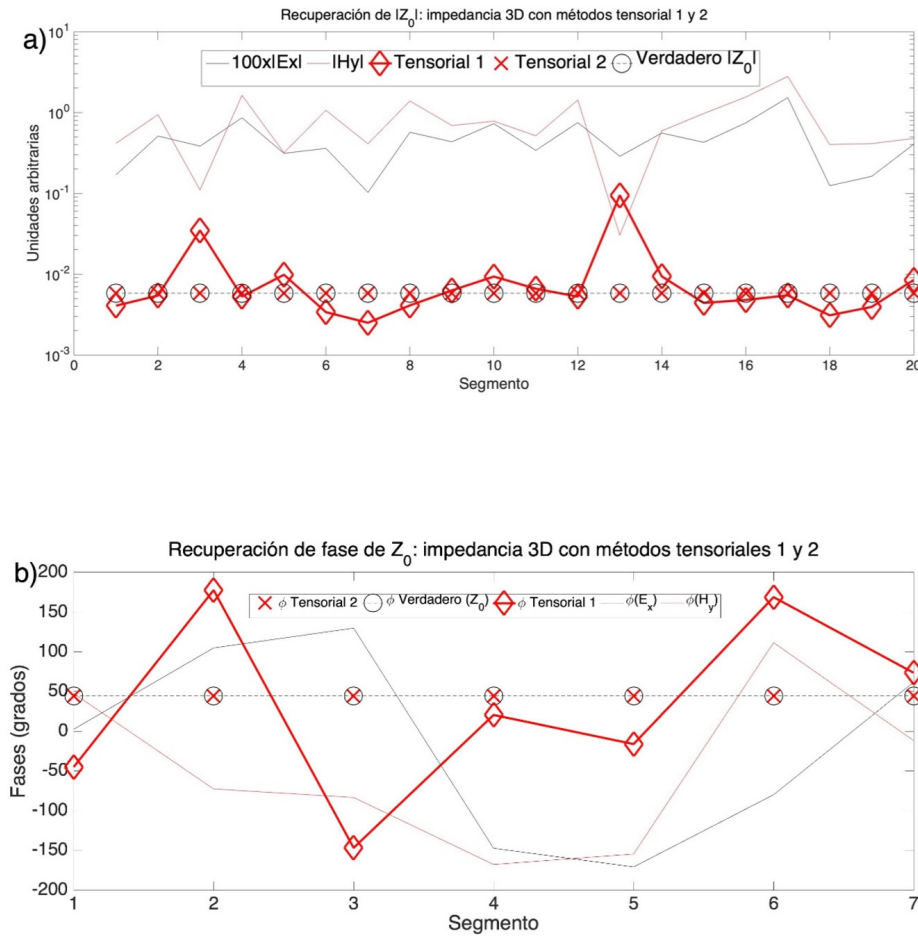


Figura 8. a) Magnitud de los campos eléctricos y magnéticos de 20 segmentos. Las curvas ya no son paralelas segmento a segmento. La máxima separación está en el segmento 13 y se refleja en la curva de la impedancia como un máximo en la estrategia tensorial 1. b) Las correspondientes fases de los campos. De nuevo las curvas dejan de ser paralelas y la estimación de la fase es incorrecta en la estrategia tensorial 1. En ambas figuras se incluyen las estimaciones de la estrategia tensorial 2 representadas con cruces rojas.

¿Cómo se puede eliminar en cualquier formulación el efecto de la polarización cuando los datos que se utilizan están polarizados? No hay receta universal. Tal vez se pueda aplicar un filtro a las series de tiempo para eliminar la polarización. O puede que se tome como referencia el promedio de muchos segmentos o se imponga a las curvas de amplitud y fase a que sean paralelas en cada segmento. Y por qué no mencionarlo, tal vez se podrían utilizar datos de satélite para anticipar las polarizaciones del

campo incidente y con eso calibrar las mediciones en tierra. Mil y un caminos se abren cuando no hay indicios de por donde buscar. Representar los resultados 1D artificialmente como tensor indica un camino que por largo que sea hacia 3D, tendrá que volver a ese mismo en 1D. Eso es lo que hicimos en la estrategia tensorial 1 pero no llegó a buen fin. Afortunadamente los resultados 1D ofrecen otra manera de organizarlos en forma tensorial según veremos en la siguiente sección.

Estrategia tensorial 2

Se puede observar en la Figura 2 que el campo eléctrico en la frontera tierra-aire es proporcional al campo eléctrico incidente. Y lo mismo para el campo magnético. Otra vez, no se necesita notación tensorial para expresar este resultado. Sin embargo, lo podemos volver a hacer artificialmente buscando indicios de la posible versión 3D. Considerando los dos modos ortogonales las expresiones son

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^H & 0 \\ 0 & k_{yy}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x^i \\ H_y^i \end{pmatrix}, \quad k_{xx}^H = k_{yy}^H = 2 \quad (3)$$

$$y \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^E & 0 \\ 0 & k_{yy}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{pmatrix},$$

$$k_{xx}^E = k_{yy}^E = 2 \frac{\gamma_0}{\gamma} = 1.49 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{\rho}{T}} e^{i\pi/4}. \quad (4)$$

De nuevo aparecen ceros que se antoja reemplazarlos por constantes arbitrarias en una generalización hipotética 3D. Esta sería

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^E & k_{xy}^E \\ k_{yx}^E & k_{yy}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{pmatrix} \quad y$$

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^H & k_{xy}^H \\ k_{yx}^H & k_{yy}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x^i \\ H_y^i \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Las ecuaciones 3 y 4 representan lo que se sabe para el caso 1D resolviendo las ecuaciones de Maxwell. Por su parte, las ecuaciones en 5 representan una inferencia inductiva desde 1D que se propone como hipótesis para 3D, la cual no necesariamente es cierta.

Esta última generalización está inacabada porque los campos incidentes no se conocen. Sin embargo, esto es todo lo que tiene que ofrecer la operación de rellenar ceros en el álgebra de los resultados 1D. Parecería que esta forma de proceder no tiene nada de científica. Sin embargo, muchos descubrimientos en la ciencia se realizaron de esta manera. Las mismas ecuaciones de Maxwell fueron por años consideradas especulaciones, siendo repudiadas por muchos, incluso por quien dominó la ciencia del siglo XIX lord Kelvin. Y es que Maxwell agregó un término sin suficiente base experimental, solo para que las ecuaciones fueran autoconsistentes. Ese término fue crucial para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas. Volviendo a nuestro problema, todo lo que nos queda es la ecuación 5, y no como cierta sino como una hipótesis que hay que desarrollar, probar y justificar teóricamente más allá de sustituir ceros por constantes arbitrarias.

La primera generalización de escalar a tensor representada en la ecuación 2 no cumple con el criterio de que las impedancias no dependan de la polarización de los campos. Veremos ahora a dónde nos lleva la segunda generalización representada en la ecuación 5. Nos lleva a la suposición de que los campos en la frontera tierra-aire, los medidos, son proporcionales a los incidentes componente a componente. También, a que existen efectos indirectos de las componentes perpendiculares, y que estos se suman a los anteriores. Sin más justificación, lo que hicimos fue llenar con constantes arbitrarias el tensor artificial que construimos con base en el análisis 1D. No sabemos nada de las ocho constantes de proporcionalidad, cuatro eléctricas y cuatro magnéticas, más allá de que son adimensionales y que en 1D cuatro son ceros. Tampoco sabemos si son independientes de la polarización. Podemos proseguir trabajando las fórmulas y ver a dónde podemos llegar, aunque no estemos ciertos de las suposiciones, y después buscar justificarlas si vale la pena. De hecho, esta

es una buena estrategia para encontrar nuevas relaciones como en el presente caso; aunque lo que buscamos ya se conozca, la técnica es la misma cuando no se sabe nada.

Afortunadamente todas las suposiciones mencionadas en el párrafo anterior son ciertas. Se derivan como casos especiales de dos propiedades muy generales de las ecuaciones de Maxwell: homogeneidad y superposición con respecto a las fuentes. Los detalles sobre las propiedades generales se presentan en el Apéndice A, y la aplicación al método magnetotelúrico se presenta en el Apéndice B.

Prosiguiendo con el álgebra, lo primero que hay que notar es que los campos incidentes no se conocen. Sin embargo, sabemos que los campos primarios son los de una onda plana en el aire. En este caso se cumple que $E_x^i = Z_0 H_y^i$ y $E_y^i = -Z_0 H_x^i$, donde Z_0 representa la impedancia del vacío. Sustituyendo en la ecuación (5) tenemos

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = Z_0 \begin{pmatrix} k_{xx}^E & k_{xy}^E \\ k_{yx}^E & k_{yy}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_y^i \\ H_x^i \end{pmatrix} \quad y$$

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx}^H & k_{xy}^H \\ k_{yx}^H & k_{yy}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x^i \\ H_y^i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Hay que intercambiar las columnas de la matriz en la ecuación de la izquierda para también intercambiar las posiciones de los campos magnéticos. Esto viene de que en el aire los eléctricos están relacionados con sus perpendiculares magnéticos. Resolviendo para los campos magnéticos incidentes en la ecuación de la derecha y sustituyendo en la de la izquierda obtenemos

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = Z_0 \begin{pmatrix} k_{xy}^E & k_{xx}^E \\ k_{yy}^E & k_{yx}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{xx}^H & k_{xy}^H \\ k_{yx}^H & k_{yy}^H \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

El tensor de constantes magnéticas en 1D es diagonal por lo que obviamente tiene inversa. En el caso 3D es de esperarse que los elementos cruzados sean menores que los de la diagonal. En tal caso, las filas del tensor seguirían siendo independientes, y también las columnas, por lo que el tensor seguiría teniendo inversa. Salvo en casos excepcionales el tensor podría ser singular. Expresando la inversión explícitamente y multiplicando se obtiene

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{Z_0}{\det(K^H)} \begin{pmatrix} k_{xy}^E k_{yy}^H - k_{xx}^E k_{yx}^H & -k_{xy}^E k_{xy}^H + k_{xx}^E k_{xx}^H \\ k_{yy}^E k_{yy}^H - k_{yx}^E k_{yx}^H & -k_{yy}^E k_{xy}^H + k_{yx}^E k_{xx}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Cada elemento del tensor es una combinación de las constantes de proporcionalidad, eléctricas y magnéticas. Las unidades de los elementos son Ohms. La ecuación 8 se puede resumir como

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

La segunda generalización nos lleva hasta aquí. Tenemos cuatro números complejos que dependen sólo de la distribución de resistividad del subsuelo; no dependen, como sí lo hacen en la primera generalización, de la polarización de los campos. Esta es una propiedad heredada de las constantes de proporcionalidad según se demuestra en los Apéndices A y B. El relleno de los ceros por constantes arbitrarias pasa de especulación a certidumbre en su conexión formal con las ecuaciones de Maxwell.

Es interesante observar que ambas estrategias, la 1 y la 2, en realidad convergen a la misma forma del tensor. La primera establece que debe haber cuatro elementos, y la segunda da los detalles de cómo deben calcularse esos elementos en términos de las constantes de proporcionalidad. La intención del ejercicio no es, obviamente, establecer el tensor de impedancias como algo nuevo, sino presentar una narrativa lógica entre el análisis 1D de Cagniard (1953) y el de Cantwell

(1960) para 3D. Ambos convergen en que las mediciones deben procesarse de tal manera que solo dependan de las propiedades del subsuelo. La generalización va del inverso de un escalar a la inversa de una matriz.

Tenemos el tensor: surge nuevo problema

Si no se conocen los campos incidentes, menos se conocen las constantes de proporcionalidad, por lo que no se puede simplemente sustituirlas en la ecuación 8 para obtener las impedancias. Resulta que determinar los elementos del tensor utilizando las mediciones es un problema completamente diferente. Para entender mejor el problema conviene separar las incógnitas a la manera convencional de un sistema de ecuaciones lineales como sigue

$$\begin{pmatrix} H_x & H_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_x & H_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

Nos damos cuenta de que tenemos cuatro incógnitas y solamente dos ecuaciones. Con otro par de mediciones completamos el sistema. Esto es

$$\begin{pmatrix} H_{x1} & H_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{x1} & H_{y1} \\ H_{x2} & H_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{x2} & H_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \\ E_{x2} \\ E_{y2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Multiplicando ambos miembros por la inversa de los campos magnéticos obtenemos la solución

$$\begin{pmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{x1} & H_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{x1} & H_{y1} \\ H_{x2} & H_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{x2} & H_{y2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \\ E_{x2} \\ E_{y2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Para que la inversa exista se requiere que las dos nuevas ecuaciones sean linealmente independientes de las dos primeras. Esto significa que deberán los campos tener diferente polarización. En la ecuación 11 la matriz de campos magnéticos es 4x4, la de impedancias 4x1 y la de campos eléctricos 4x1. En caso de que haya más de dos mediciones estas se pueden incorporar como nuevos renglones de la matriz de campos magnéticos, de tal forma que las dimensiones serán de 2nx4, donde n es el número de mediciones. La matriz de impedancias sigue siendo de 4x1 y la de campos eléctricos de 2nx1. En estos casos no procede tomar la inversa de la matriz de campos magnéticos. La solución sería la que ofrece el operador de mínimos cuadrados en su forma estándar: $x=(A^T A)^{-1} A^T y$. La solución será estable cuando haya por lo menos dos pares de mediciones independientes.

En lo que sigue se utilizan solo cuatro mediciones como se indica en la ecuación 12. En las Figuras 9 y 10 se muestra cómo la estimación de las impedancias cuando los datos tienen ruido depende mucho de qué tan independientes sean los campos que se utilicen. La Figura 9 ilustra el caso en que las dos polarizaciones son casi idénticas y como consecuencia la estimación de las impedancias es incorrecta.

La Figura 10 muestra que la recuperación mejora sustancialmente cuando se utilizan polarizaciones que son prácticamente perpendiculares, lo cual hace que los renglones de la matriz de campos magnéticos sean linealmente independientes. En ambos casos a los campos eléctricos se les sumó un 5% de ruido aleatorio.

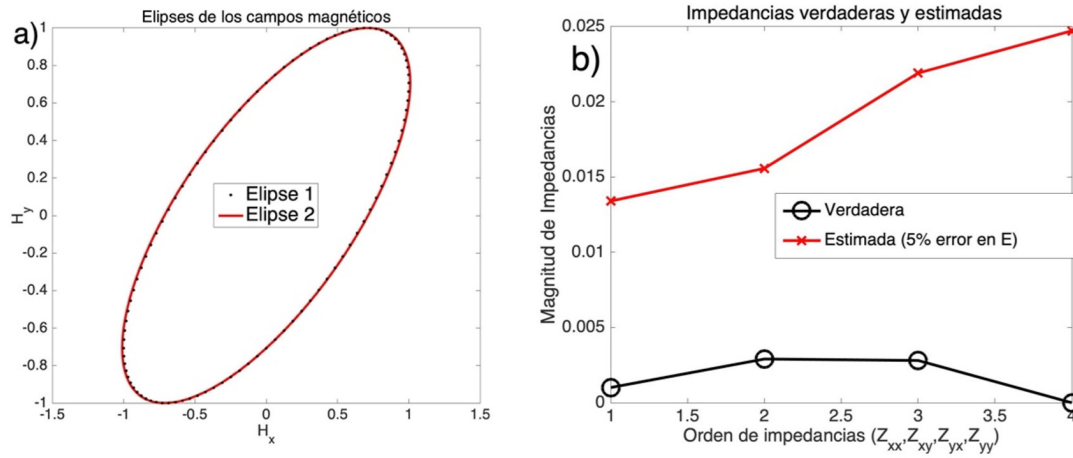


Figura 9. a) Elipses de polarización de los dos campos magnéticos utilizados en la ecuación 12. Las polarizaciones son casi idénticas. b) Las estimaciones de las impedancias son incorrectas en datos con ruido.

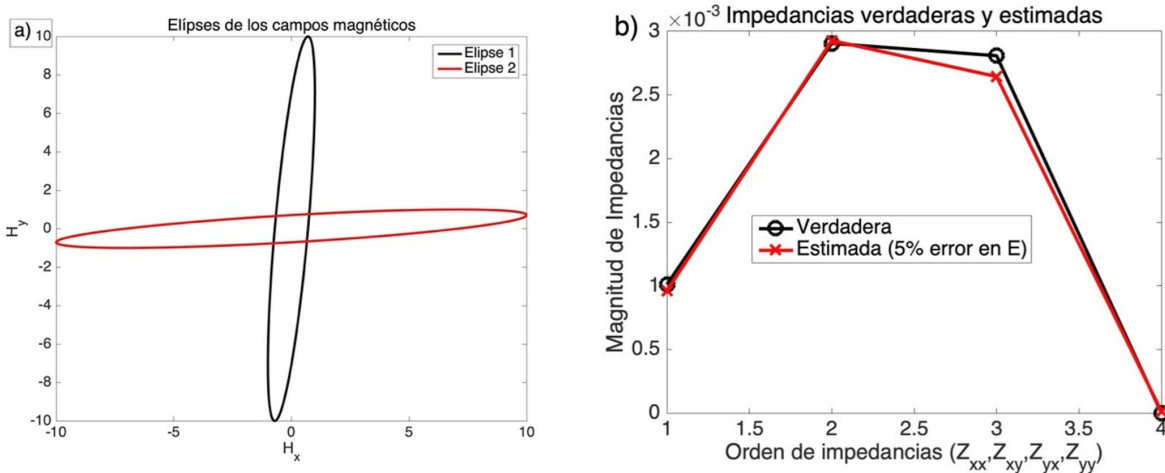


Figura 10. a) Elipses de polarización de los dos campos magnéticos utilizados en la ecuación 12. Las polarizaciones son muy diferentes. b) Las estimaciones de las impedancias mejoran considerablemente cuando la polarizaciones son muy diferentes.

Las impedancias del tensor no son razones de campos individuales. En realidad, son combinaciones de varios campos, mínimo dos que sean linealmente independientes o que tengan diferente polarización. Esto se puede resumir de esta manera

$$Z_{ij}(H_{x1}, H_{y1}, H_{x2}, H_{y2}, E_{x1}, E_{y1}, E_{x2}, E_{y2}) \neq \frac{E_i}{H_j} \quad (13)$$

La fórmula para la resistividad se derivó históricamente del análisis de un semi espacio homogéneo. Se le agregó el calificativo de aparente cuando se aplicó a la respuesta de un medio estratificado, que también se obtiene como la razón de campos. Sin embargo, la fórmula se sigue aplicando a los cuatro elementos del tensor, aunque no sean razones de campos individuales. Las fórmulas para la resistividad aparente y fase son

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\omega \mu_0} |Z_{ij}|^2 \quad \text{y} \quad \varphi_{ij} = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(Z_{ij})}{\text{Re}(Z_{ij})} \quad (14)$$

Para $i \neq j$ las curvas contra periodo tienen más o menos la misma cualidad intuitiva que las de 1D. Sin embargo, para $i = j$ las cosas son muy diferentes. Se trata de los términos cruzados. Si estas resistividades son pequeñas no significa precisamente eso, que las resistividades sean pequeñas, sino que no hay interacción entre componentes perpendiculares de los mismos campos.

Conclusiones

Es interesante que el fenómeno que invalida al magnetotelúrico escalar como método práctico de exploración, es el mismo que lo salva, pero ya en su versión tensorial. El fenómeno es la variación temporal de la polarización de los campos eléctricos y magnéticos. Las variaciones no tienen ningún efecto cuando no hay efectos cruzados entre componentes perpendiculares, como se supone en el caso escalar. El hecho es que estos efectos cruzados son la norma más que la excepción. La combinación de estos

efectos con las variaciones de polarización hace que la versión escalar conduzca a impedancias que varían arbitrariamente. La ironía es que si estas variaciones de polarización no existieran la versión tensorial tampoco existiría. También es revelador que se pueda hacer una ruta lógica para ir de la versión escalar a la tensorial, llenando mecánicamente huecos en la primera. Las suposiciones se validan como casos especiales de dos propiedades muy generales de las ecuaciones de Maxwell. Con esto queda plenamente claro que los elementos del tensor de impedancias no dependen de la polarización de los campos y que dependen solamente de la distribución de resistividad del subsuelo.

Referencias

- Cagniard, L. (1953). Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, 18(3), 605-635.
- Cantwell T (1960) Detection and analysis of low frequency magnetotelluric signals. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Gómez-Treviño, E. (1987). Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems. *Geophysics*, 52(9), 1297-1302.
- Gómez-Treviño, E., Esparza, F. J., & Méndez-Delgado, S. (2002). New theoretical and practical aspects of electromagnetic soundings at low induction numbers. *Geophysics*, 67(5), 1441-1451.
- Gómez-Treviño, E., Antonio-Carpio, R., Romo, J. M., & Esparza, F. (2013). A recursive set of invariants of the magnetotelluric impedance tensor. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 48(3), 265-27
- Weidelt, P. and Chave, A. G. (2012). The magnetotelluric response function. In Chave, A. D., & Jones, A. G. (Eds.). (2012). *The magnetotelluric method: Theory and practice*. Cambridge University Press.

APÉNDICE A

Linealidad de las ecuaciones de Maxwell con respecto a las fuentes.

Una función $f(x)$ es lineal si cumple con dos condiciones. Una es el principio de superposición: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, y la otra la propiedad de homogeneidad: $f(hx)=hf(x)$, donde h es una constante. En la Figura A-1 se presentan soluciones de las ecuaciones de Maxwell para dos fuentes por separado. El problema se plantea de cómo será la solución cuando las dos fuentes están presentes. Sumando las ecuaciones, lo cual es una operación válida, resulta por simple asociación que la solución buscada es la suma de las soluciones por separado. Este es el principio de superposición. Lo necesitamos en el Apéndice B para el caso magnetotelúrico.

Propiedad 1: Superposición de fuentes

Fuente J_0 $\nabla \times E_0 = -i\omega B_0$ $\nabla \times H_0 - \sigma E_0 - i\omega \varepsilon E_0 = J_0$ SOLUCIÓN: $E_0(J_0) \quad H_0(J_0)$	1	Fuente J_1 $\nabla \times E_1 = -i\omega B_1$ $\nabla \times H_1 - \sigma E_1 - i\omega \varepsilon E_1 = J_1$ SOLUCIÓN: $E_1(J_1) \quad H_1(J_1)$	2	Fuentes juntas $J_0 + J_1$ $\nabla \times E = -i\omega B$ $\nabla \times H - \sigma E - i\omega \varepsilon E = J_0 + J_1$ PROBLEMA: $E(J_0 + J_1) = ?$ $H(J_0 + J_1) = ?$ Sumando 1 y 2: $\nabla \times (E_0 + E_1) = -i\omega (B_0 + B_1)$ $\nabla \times (H_0 + H_1) - \sigma (E_0 + E_1) - i\omega \varepsilon (E_0 + E_1) = J_0 + J_1$ SOLUCIÓN: $E(J_0 + J_1) = E(J_0) + E(J_1)$ $H(J_0 + J_1) = H(J_0) + H(J_1)$	3 4
--	---	--	---	--	---

Figura A-1. Demostración de que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cumplen con el principio de superposición.

En el punto 1 de la Figura A-2 se muestra la solución de las ecuaciones de Maxwell para una sola fuente. En el punto 2 se presenta el problema de la solución cuando se multiplica la intensidad de la fuente por un factor. La solución se obtiene por asociación multiplicando las ecuaciones en el punto 1 por el factor, lo cual es una operación válida. La solución es la misma que la original pero multiplicada por el mismo factor como se muestra en el paso 3. Esta es la propiedad de homogeneidad. La necesitamos también en el Apéndice B para el caso magnetotelúrico.

Propiedad 2: Homogeneidad

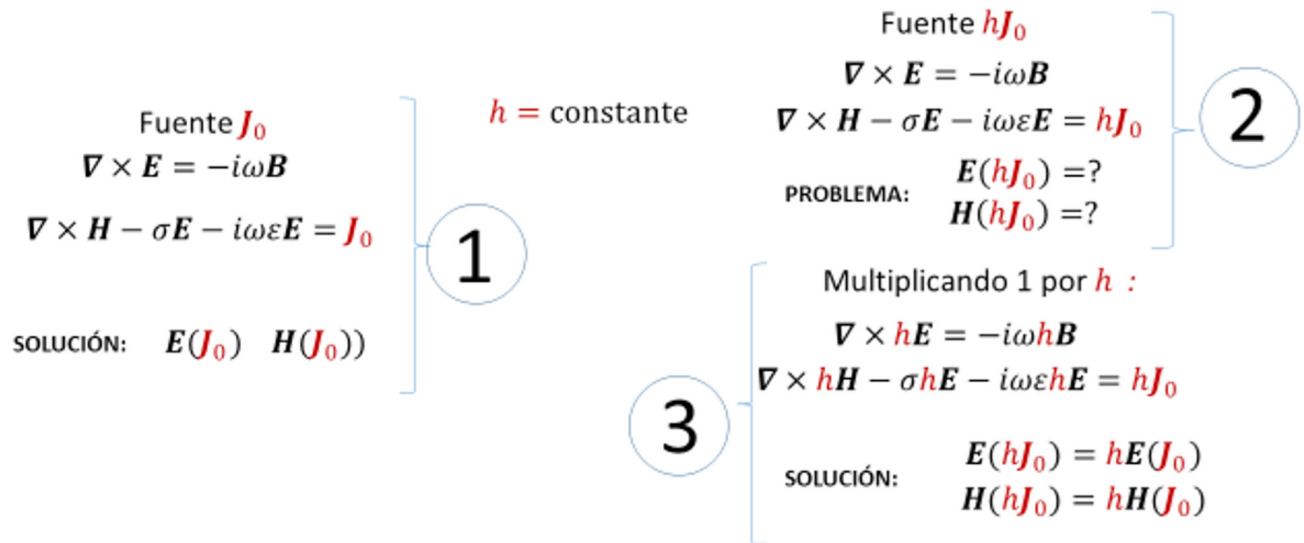


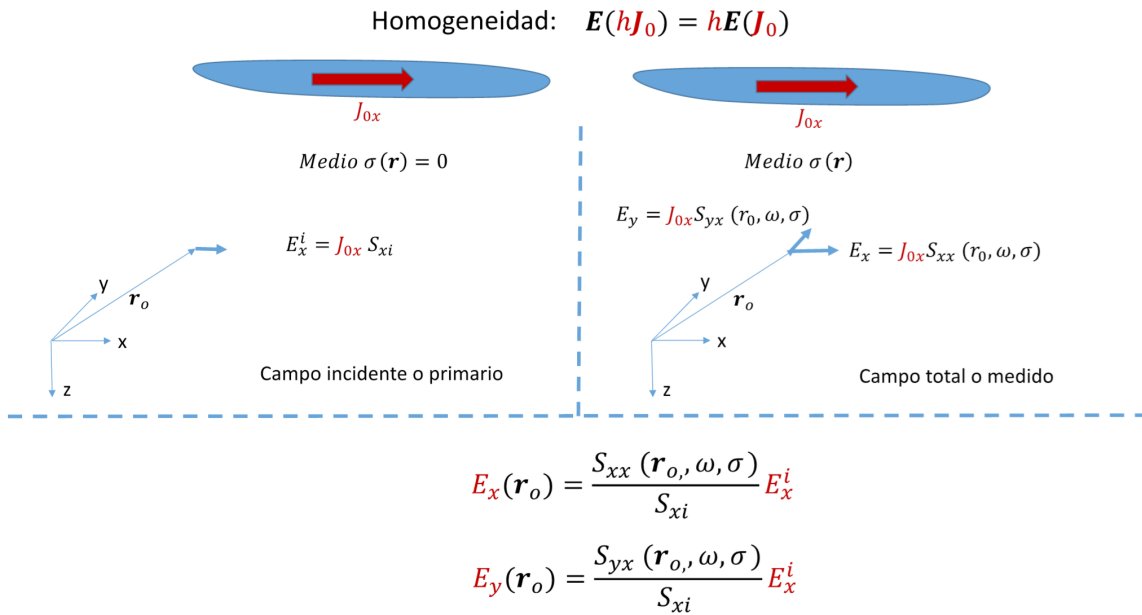
Figura A-2. Demostración de que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cumplen con la propiedad de homogeneidad.

La linealidad de las ecuaciones de Maxwell no es una característica que salga a relucir mucho en problemas de geofísica. De hecho, su no linealidad es mucho más común. Es fácil convencerse de que las ecuaciones de Maxwell no son lineales con respecto a la distribución de conductividad. Supongan dos soluciones para dos distribuciones diferentes y sumen las ecuaciones: imposible llegar a que la solución de la suma es la suma de las soluciones. Tampoco cumplen con la propiedad de homogeneidad con respecto a la conductividad. Sin embargo, considerando la conductividad y el periodo como las variables, las ecuaciones cumplen con esta propiedad. De esto se derivan ecuaciones para problemas inversos que, si bien no son lineales, comparten características con las correspondientes aproximaciones lineales (Gómez-Treviño, 1987). De hecho, solo hay un método electromagnético en geofísica que es enteramente lineal (Gómez-Treviño, et. al, 2002). Afortunadamente para el caso que nos ocupa las ecuaciones de Maxwell son enteramente lineales.

APÉNDICE B

Linealidad entre los campos inducidos y los incidentes

La única forma en que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cumplan con la propiedad de homogeneidad es que sean proporcionales a la intensidad de la fuente. En este caso la intensidad de la fuente es una densidad superficial de corriente sobre un plano horizontal de tal forma que emite una onda plana. La solución en la Figura B-1 es simplemente una constante para igualar dimensiones porque los campos de la fuente no decaen con la distancia. Obviamente el incidente tampoco depende de la distribución de conductividad $\sigma(r)$, pero sí los campos inducidos E_x y E_y a través de las funciones S_{xx} y S_{yx} , respectivamente. La clave de la proporcionalidad entre los campos inducidos y los incidentes es que ambos comparten la misma fuente. Tomando las razones de los campos inducidos a los incidentes se cancela la intensidad de la fuente, reduciéndose a las expresiones mostradas en la parte de abajo de la Figura B-1. La primera corresponde a k_{xx}^E en la notación del texto principal, y la segunda a k_{yx}^E . Esta última es el efecto cruzado debido a que el incidente está en la dirección x y el inducido en la dirección y . Físicamente esto se debe a que parte de la corriente puede desviarse en la dirección perpendicular. Ambas constantes dependen de la posición r_o , de la frecuencia y de la distribución de conductividad en el subsuelo.



F Figura B-1. La única forma que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cumplan con la propiedad de homogeneidad es que la intensidad de la fuente multiplique al resto de la solución. Dividiendo las ecuaciones de la derecha por las de la izquierda se obtienen las que están abajo en la figura. En la simbología del texto principal $E_x = k_{xx}^E E_x^i$ y $E_y = k_{yx}^E E_x^i$. Las constantes de proporcionalidad no dependen de los campos o de su polarización.

En el análisis anterior el campo eléctrico incidente se supuso en una sola dirección y se relacionó con dos componentes perpendiculares del campo inducido. En lo que sigue procedemos a revés, supondremos dos fuentes perpendiculares y una sola dirección de los campos inducidos. En el lado izquierdo de la Figura B-2 se presenta el caso de solo E_x^i donde por la propiedad de homogeneidad se establece k_{xx}^E en relación con el campo inducido en la dirección x. En el lado derecho se presenta el caso de solo E_y^i donde, otra vez por la propiedad de homogeneidad se establece k_{xy}^E en relación con el campo inducido en la dirección perpendicular. Tenemos entonces dos campos eléctricos en la dirección x asociados con fuentes independientes que deberían estar encendidas al mismo tiempo para simular la situación real. El campo que se mediría en la frontera tierra-aire sería la suma de los dos por el principio de superposición según se muestra en la parte de abajo de la figura B-2. De forma similar se justifican la otra componente del campo eléctrico y las dos del campo magnético. Con esto se justifica la ecuación 5 que fue llenada con constantes arbitrarias sin justificación rigurosa.

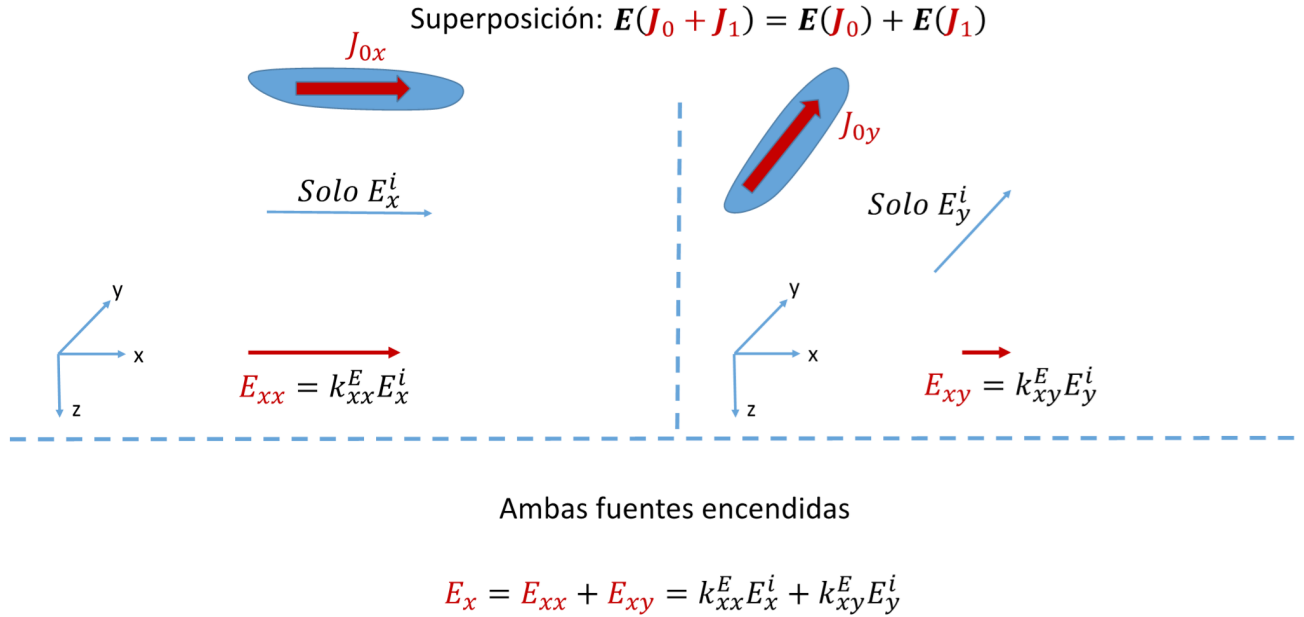


Figura B-2. Una fuente emite solo y produce en la tierra campo en la misma dirección. Otra fuente que emite solo puede producir en la tierra campo perpendicular. Si ambas están activas como sucede en la realidad, el campo en la tierra es la suma de los dos por el principio de superposición.

Manuscrito recibido: 1 de diciembre de 2025

Recepción del manuscrito corregido: 2 de febrero de 2026

Manuscrito aceptado: 12 de febrero de 2026