

Jorge Carrera*

La importancia de las ecuaciones diferenciales en los más diversos campos, entre los que se incluye la geofísica, ha llevado al mejoramiento e innovación de los métodos numéricos para resolverlas. Entre las principales herramientas matemáticas usadas se encuentran las diferencias finitas, los elementos finitos y los métodos de frontera. El Dr. Ismael Herrera ha desarrollado una teoría que permite dar una base común a estos tres métodos.

El marco general de dicha teoría es algebraico, lo que permite una generalidad que la introducción, al menos desde un principio, de estructuras topológicas no conllevaría.

Representemos la ecuación diferencial considerada, parcial u ordinaria, por medio de operadores. Por ejemplo,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 4 \frac{du}{dx} + 4u = \sin x \quad (1)$$

Se convierte en

$$\mathcal{L}u = \sin x, \quad (2)$$

donde

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + 4 \frac{d}{dx} + 4 \quad (3)$$

Las funciones u , que son solución de (1) o (2), forman un subconjunto de un espacio de funciones. Si en ese espacio tenemos definido un producto escalar $(*,*)$, entonces una función u que satisface

$$(\mathcal{L}u, v) + (\sin x, v) \quad (4)$$

para toda v , será solución también de (2). El producto escalar está frecuentemente definido por integrales

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx \quad (5)$$

donde Ω es un subconjunto del dominio de definición de u, v . En este caso el

*Instituto de Geofísica, UNAM.

operador $\mathcal{L}$ puede satisfacer una fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L}u dx = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* v dx \quad (6)$$

$\mathcal{L}^*$ es el operador adjunto de $\mathcal{L}$, definido por

$$(\mathcal{L}^*u, v) = (\mathcal{L}v, u) \quad (7)$$

Si definimos el operador P por

$$(Pu, v) = \int_{\Omega} v \mathcal{L}u dx \quad (8)$$

y Q por

$$(Q^*u, v) = (Qv, u) = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* v dx \quad (9)$$

entonces la fórmula de Green es expresable como

$$(Pu, v) = (Q^*u, v) \quad (10)$$

La idea principal de la teoría es caracterizar, desde un punto de vista algebraico las propiedades de los operadores que forman una fórmula de Green, que además se generaliza a operadores definidos en campos discontinuos. Esta generalización es la que permite abordar métodos como el de elementos finitos, en donde la región original se divide en subregiones. La fórmula a la que se llega es

$$(Pu, v) - (Bu, v) - (Ju, v) = (Q^*u, v) - (C^*u, v) - (K^*u, v) \quad (11)$$

Cada uno de los operadores P, B, J, Q, C y K representa una parte de la información del problema considerado. P y Q proporcionan la información contenida dentro de la región; B y C son operadores "de frontera", o sea que contienen la información en las frontera de la región; mientras que J y K , el operador de "salto" y de "promedio" respectivamente, son portadores de la información acerca de la conducta de la función en las superficies de discontinuidad.

La importancia de la fórmula (11) consiste en que nos proporciona una opción frente al problema original. Dicho problema es

$$(Pu,v)-(Bu,v)-(Ju,v)=(f-g-j,v) \quad (12)$$

donde f es el lado derecho de la ecuación diferencial original y g y j son los valores prescritos en la frontera y los saltos de la solución.

Si los operadores satisfacen una fórmula de Green generalizada, tenemos entonces como alternativa para resolver nuestro problema la siguiente igualdad

$$(Q^*u,v)-(C^*u,v)-(K^*u,v)=(f-g-j,v) \quad (13)$$

que es en muchos casos más informativa que la anterior.

Ahora bien, dado que en gran parte de los casos no es posible obtener la solución exacta (analítica) del problema, debemos utilizar métodos numéricos para encontrar una solución aproximada. Para esto se procede a reducir el problema a un sistema de ecuaciones algebraicas, generalmente lineales, de donde podemos obtener los valores de la solución proximada para los nodos.

En nuestro caso el paso al sistema algebraico ("discretización") se efectúa usando las llamadas "funciones de peso". O sea, dado que (12) y (13) se cumplen para todas las funciones v , se escoge un sistema finito de ecuaciones ; y se busca una función que satisface el sistema

$$\begin{aligned} \langle Q^*u, \varphi_i \rangle - \langle C^*u, \varphi_i \rangle - \langle K^*u, \varphi_i \rangle = \\ \langle f-g-j, \varphi_i \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

$i = 1, \dots, N$

Esta u nos dará, en general, sólo una aproximación a la solución exacta.

Una gran ventaja de este método es que la elección de las funciones φ_i nos permite concentrar la información ahí donde nos es necesario. Por ejemplo, si pedimos que $\langle Q_i, u \rangle \approx 0$, (14) se convierten en

$$-\langle C^*u, \varphi_i \rangle - \langle K^*u, \varphi_i \rangle = \langle f-g-j, \varphi_i \rangle \quad (15)$$

O sea que en el esquema final la información se ha concentrado en las fronteras y los nodos. Dicho esquema es entonces comparable con los esquemas ya conocidos de diferencias finitas.

Se han obtenido ya algoritmos para diferentes sistemas de funciones de peso, incluidos algunos, los llamados T-completos, que proporcionan los valores exactos de la solución en los nodos. El trabajo prosigue con la elaboración de otros algoritmos.

Referencias:

- I. Herrera, "Unified Approach to Numerical Methods, Part I", Numer. Methods Partial diff. Eq. 1, 12-37 (1985).
- I. Herrera, "Unified Approach to Numerical Methods, Part II", Numer. Methods Partial Diff. Eq., En prensa.
- I. Herrera, L. Chargoy, G. Alducin, "Unified Approach to Numerical Methods, Part III", Numer. Methods Partial Diff. Eq. En prensa.

GEOCAPSULA

UN DÍA MAS LARGO QUE UN AÑO

En 1965 se descubrió que Mercurio no siempre da la misma cara al Sol, como antes se había creído, sino que su período de rotación es aproximadamente 2/3 de su período de traslación. La combinación de ambos movimientos hace que el día mercuriano sea más largo que el año. De hecho un día en Mercurio dura lo que le toma al planeta dar dos vueltas alrededor del Sol, esto es, el día dura 2 años en Mercurio.