

PRECIPITACION ANUAL PROBABLE, USANDO SERIES DE FOURIER

Domitilo Pereyra, Francisco Escamilla

La lluvia es una de las variables climáticas más conocidas por cualquier persona, ya que su presencia o ausencia influye de manera determinante en la mayoría de las actividades humanas; este líquido al llegar a la superficie de la Tierra puede ser almacenado en presas, donde es posible instalar criaderos de peces (acuacultura), generar energía hidroeléctrica o distribuirla a los distritos de riego y a las grandes ciudades (que por lo general carecen de este líquido vital). Al aprovecharse el agua de lluvia, en las formas expuestas anteriormente, se contribuye a incrementar la producción alimenticia y el desarrollo industrial del país.

Debido a la gran importancia de este líquido vital, surge la necesidad de tratar de conocer las precipitaciones anuales futuras en una determinada región y planear su aprovechamiento de manera adecuada a las necesidades del país. Para pronosticar las precipitaciones futuras se recurrió a las series de Fourier ajustadas a una muestra de datos de precipitaciones en 56 años de la estación No. 49, localizada a una latitud $19^{\circ}32'$, longitud de $96^{\circ}55'$ y una altitud de 1361 m.s.n.m., ubicada en la Ciudad de Xalapa, Veracruz.

Como antecedentes a este estudio (en el país) se pueden mencionar los trabajos de García (1981) y Pereyra (1984), en los cuales el objetivo fue solamente determinar la tendencia de la precipitación en el tiempo, con la que se pueden conocer los períodos de sequías, que tanto daño causan al país, así como los lluviosos, durante los cuales es posible almacenar el agua en grandes presas y emplearla en los años de escasa precipitación pluvial. En este trabajo, la serie de Fourier ajustada a la precipitación anual de Xalapa, Ver., además de la tendencia proporciona la variación de la precipitación en este intervalo de tiempo, con un error de solamente 0.8%, por lo cual se puede emplear para inferir acerca de las precipitaciones anuales futuras en esa zona.

A continuación se presenta una breve historia de las series de Fourier, así como la descripción de la Teoría de éstas, el método de ajuste de la serie, los

resultados obtenidos, las conclusiones y las recomendaciones necesarias para el empleo de estas series en el pronóstico.

Antecedentes de las series de Fourier

La aplicación de las series de Fourier en la solución de problemas data desde la época de Daniel Bernoulli (1700-1781), quien las utilizó para resolver problemas relacionados con la cuerda vibrante,¹² el mayor desarrollo de esta teoría se llevó a cabo en 1822 cuando el físico francés Joseph de Fourier (1768-1830), publicó el libro "Théorie Analytique de la Chaleur", desde entonces, y debido a su importancia, se ha desarrollado una extensa teoría acerca de las series que llevan su nombre, siendo una de las ramas de la Matemática que mayores aplicaciones ha encontrado en el campo científico y tecnológico. La base de las series es representar funciones periódicas por medio de funciones cíclicas particulares, tales como las trigonométricas.⁵

El estudio de fenómenos periódicos o cíclicos ha encontrado en las series de Fourier una herramienta de gran importancia, principalmente en áreas como la Electrónica, Climatología, Hidrología, Mecánica de Suelos y Acústica, entre otros. En general, las series de Fourier representan una forma conveniente de estudiar fenómenos cíclicos como es el caso de la precipitación anual, objetivo de este trabajo.

Concepto de series de Fourier

Una función $f(x)$ se dice que es periódica si está definida para todo x real y si existe el número positivo T tal que:

$$f(x+T) = f(x) \quad (1)$$

Al valor T se le llama el período de $f(x)$. De la misma forma, generalizando, se entiende que si n es un entero cualquiera:

$$f(x+nT) = f(x) \quad (2)$$

Las funciones periódicas más conocidas son las trigonométricas, ya que satisfacen la condición dada por la ec.2. Frecuentemente, en algunos problemas prácticos se presentan fenómenos periódicos o que se les puede considerar como tales.⁷ Estos fenómenos pueden representarse por una serie trigonométrica de la siguiente forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de la serie, los cuales están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= (1/T) \left(\int_0^T f(x) dx \right), \\ a_n &= (2/T) \left(\int_0^T f(x) \cos nx dx \right), \\ b_n &= (2/T) \left(\int_0^T f(x) \sin nx dx \right) \end{aligned} \quad (4)$$

a los cuales se les conoce como integrales de Euler-Fourier.

Análisis armónico

Cuando se analiza una serie de datos y se encuentra que éstos fluctúan periódicamente alrededor de la media, es frecuentemente útil ajustarle una serie de Fourier para determinar las características periódicas tales como su tendencia. De esta forma, si se tiene una serie de datos expresados como un número finito de puntos, en un cierto intervalo, pueden ajustarse a una serie de Fourier, la cual debe contener un número finito de senos y cosenos. A la determinación de los coeficientes a_0 , a_n y b_n de una serie de este tipo, es a lo que se le conoce como análisis armónico, en él, las integrales de Euler-Fourier se calculan en forma aproximada, se sustituyen las integrales por sumatorias y los coeficientes de la serie finalmente quedan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= (1/N) \sum_{i=1}^N f(i), \\ a_n &= (2/N) \sum_{i=1}^N f(i) \cos(2n\pi t(i)/T), \\ b_n &= (2/N) \sum_{i=1}^N f(i) \sin(2n\pi t(i)/T) \end{aligned} \quad (5)$$

donde N es el número de datos o longitud del período fundamental, $f(i)$ es el valor de la i -ésima

observación, n es el número de la armónica, $t(i)$ es el tiempo y T es el período fundamental.

Así, el análisis armónico proporciona el método para descomponer una señal (por ejemplo, un registro de datos de precipitación) en sus componentes armónicos y conocer, así, los constituyentes periódicos más importantes que se presentan en ésta.

A la onda formada por los primeros dos términos ($a_1 \cos(2\pi t(1)/T) + b_1 \sin(2\pi t(1)/T)$) de la serie de Fourier, se le conoce como primera armónica o como la oscilación u onda fundamental. Si el comportamiento de un fenómeno no es explicado satisfactoriamente con la serie de Fourier formada por a_0 (media de la muestra) y la primera armónica, es necesario calcular las siguientes. La segunda armónica tiene un período igual a la mitad del período fundamental, es decir varía dos veces más rápidamente; la tercera un tercio del período fundamental y así sucesivamente hasta la armónica $N/2$, que es la última que se puede calcular, y tiene un período de $1/N$ del período fundamental (ver fig. 1).

Por otra parte, si de antemano se sabe que el fenómeno que se pretende analizar con series de Fourier sufre variaciones cíclicas o periódicas, es posible, si se conoce aproximadamente el período de estas variaciones, calcular independientemente las armónicas que representan estos cambios. En caso contrario, que es lo más común, es necesario calcular la serie con el mayor número de armónicas o en todo caso la serie completa, con $N/2$ armónicas¹⁰ y después eliminar los componentes de menor contribución.

Un problema con el que nos encontramos en el análisis armónico, es conocer el período fundamental, T . Por lo general este valor es desconocido y se le asigna un valor arbitrario³ comúnmente igual o mayor al número de datos utilizados. Si el valor propuesto fuera incorrecto, esto se compensaría al calcular un número suficiente de armónicas⁸ de modo que cualquier periodicidad importante que exista en el fenómeno, se haga presente en la serie de Fourier calculada finalmente. Así, probablemente, algunas armónicas toman un valor cercano a cero y sólo aquellos que muestren periodicidades significativas permanecerán en la serie.

Una vez calculados los coeficientes de cada armónica resulta más fácil la interpretación, si se sintetiza a los dos miembros de cada armónica en la forma siguiente:

$$A_n \sin(nx + \phi_n) \quad (6)$$

donde, n es el número de la armónica.

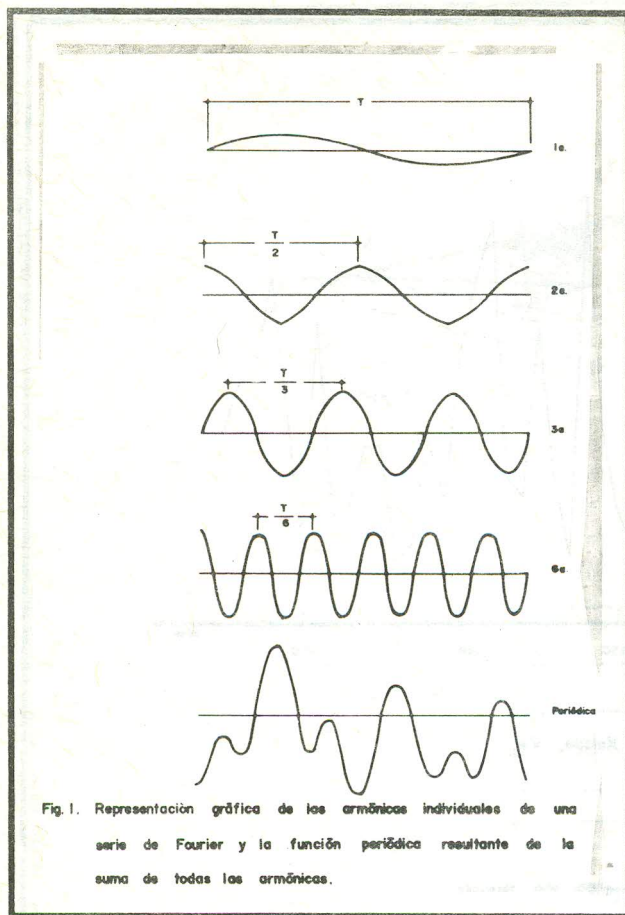


Fig. 1. Representación gráfica de los armónicos individuales de una serie de Fourier y la función periódica resultante de la suma de todas las armónicas.

Dado que

$$\sin(nx + \phi_n) = \cos n x \sin \phi_n + \sin n x \cos \phi_n$$

La ecuación 6 se expresa como:

$$A_n \sin(nx + \phi_n) = A_n \sin \phi_n \cos n x + A_n \cos \phi_n \sin n x \quad (7)$$

Considerando que $a_n = A_n \sin \phi_n$ y $b_n = A_n \cos \phi_n$, la ecuación 7 se transforma en:

$$A_n \sin(nx + \phi_n) = a_n \cos n x + b_n \sin n x \quad (8)$$

que es la forma en que se expresa la n -ésima armónica de una serie de Fourier. Por lo tanto, si a y b son conocidos, se pueden calcular los valores de ϕ_n y A_n , usando las relaciones siguientes⁸

$$\phi_n = \arctan(a_n / b_n) \quad (9)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (10)$$

Al valor A_n se le conoce como la amplitud de la n -ésima armónica y representa todo el rango, desde el punto más bajo al más alto de la onda representada por la armónica. De la misma forma, ϕ_n es el ángu-

lo de fase, el cual indica el punto del ciclo donde la onda alcanza su valor máximo.

Aplicación de las series de Fourier a la precipitación anual de Xalapa, Veracruz

Para obtener la Serie de Fourier que representara la variación anual de la precipitación, se buscó una estación que tuviera una cantidad aceptable de datos y que además fueran lo más homogéneos posibles, es decir, como menciona Conrad,² que las fluctuaciones en el tiempo fueran debidas al clima y no a otros factores.

La estación que cumplió con los requisitos antes mencionados fue la estación No. 49 con latitud $19^{\circ}32'$, longitud $96^{\circ}55'$ y altitud 1361 m.s.n.m., ubicada en la Ciudad de Xalapa, Veracruz y la cual cuenta con registros desde 1920 hasta la actualidad. De esta muestra de datos se escogió, para el presente trabajo, un intervalo de 56 años, muestra suficiente para poder describir las fluctuaciones de la lluvia anual en el tiempo, por medio de las series de Fourier. La figura 2 muestra las precipitaciones anuales de la ciudad de Xalapa.

Con estos datos se procedió a realizar el análisis armónico, es decir, el cálculo de los coeficientes a_n y b_n (ec.5) de la serie de Fourier; esto se realizó usando el programa SFOUR de un paquete estadístico. Los valores de los coeficientes de la serie se muestran en la Tabla 1. Los valores de la serie ajustada se muestran en la Tabla 2, al comparar estos valores con los observados se puede notar que los valores pronosticados por la serie de Fourier completa (28 armónicas) son casi iguales y que su diferencia es insignificante (ver Tabla 2 y Fig. 3).

Para cuantificar el error, E , que se comete en el ajuste, se utilizó la fórmula del Error Medio Cuadrático (RMS), la cual se expresa de la siguiente manera:⁴

$$E = \sqrt{\sum (Y_o - Y_c)^2} \quad (11)$$

donde: Y_o y Y_c son los valores observados y calculados, respectivamente, y N es el número de datos utilizados. El error cometido en este ajuste fue solamente de 0.8% (12.2mm). Según la ec. 6, la serie ajustada se puede expresar como,

$$y = a_0 + A_1 \sin(x + \phi_1) + A_2 \sin(2x + \phi_2) + \dots + A_n \sin(nx + \phi_n) \quad (12)$$

los valores de A_n y ϕ_n , calculados por medio de las ecuaciones 9 y 10, se proporcionan en la Tabla 3.

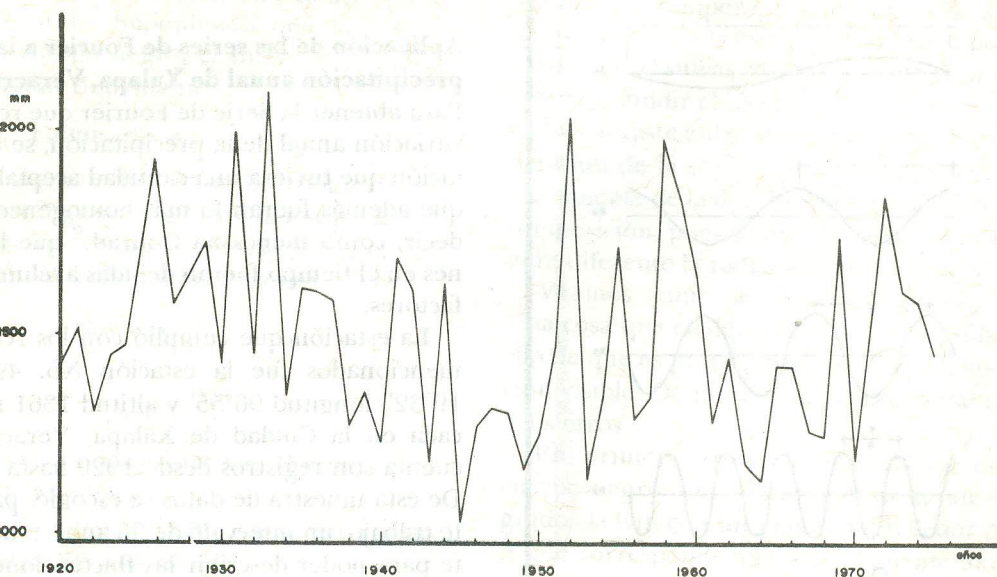


Fig. 2. Precipitación anual de la ciudad de Xalapa, Ver.

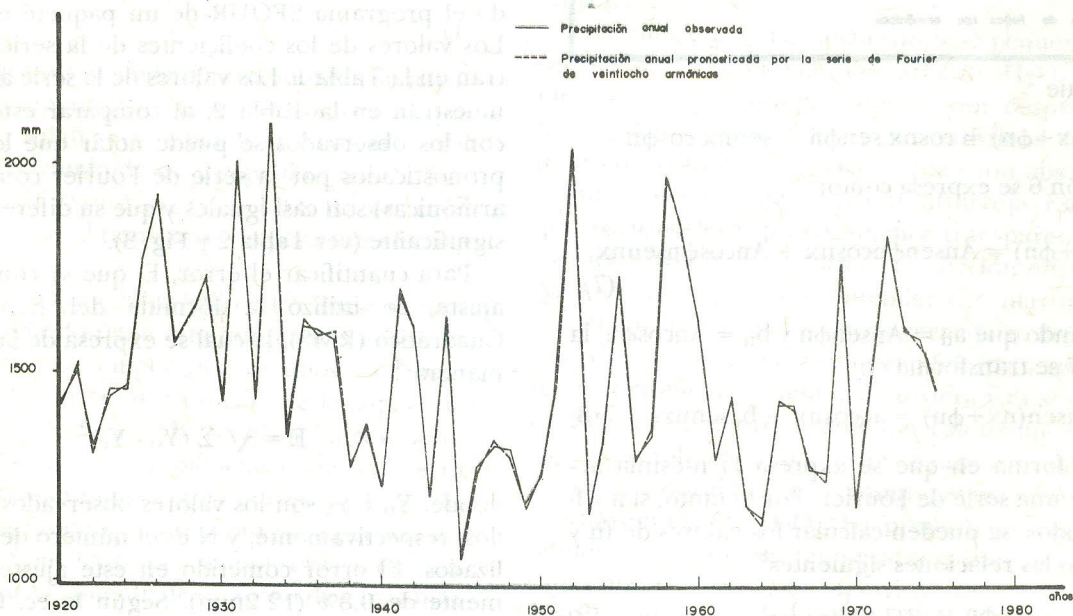


Fig. 3. Precipitación anual observada y pronosticada por la Serie de Fourier de veintiocho armónicas.

Aquí, se puede ver que algunas armónicas influyen muy poco en el resultado, por lo que pueden ser suprimidas de la serie original (28 armónicas). De esta manera se obtiene una serie, que aunque no contiene todos los términos calculados, proporciona una buena estimación del comportamiento de la precipitación anual.

Frecuentemente, al valor de la amplitud al cuadrado de una armónica (An^2), se le denomina "potencia" o varianza (Sn^2). El nombre potencia deriva del uso que en la ingeniería electrónica le han dado, debido a que expresa el contenido de energía de la componente de n -ésima frecuencia de una corriente eléctrica. A su vez, si se considera a la desviación de su valor medio como su respectiva varianza (Sn^2), se puede calcular el porcentaje de contribución de la n -ésima armónica con respecto a la serie de Fourier total.³ Por lo tanto, si la Varianza estimada para la n -ésima armónica es Sn^2 y la varianza de la serie de datos es Sy^2 , se tiene que el porcentaje de contribución de la n -ésima armónica $= (Sn^2/Sy^2) \times 100$, donde $Sn^2 = an^2 + bn^2$. De aquí que, conociendo el porcentaje de contribución de cada armónica de la serie de Fourier, se pueden eliminar los que no contribuyen en gran medida al resultado. Así, si sólo unas cuantas armónicas (por ejemplo las primeras) representan un buen porcentaje de contribución del resultado producido por la serie de Fourier completa, es posible trabajar únicamente con la serie formada

por estas armónicas, sin que las conclusiones varíen significativamente.²

En la serie de Fourier ajustada a la muestra de 56 años de registro, se nota que los porcentajes de contribución se encuentran repartidos a lo largo de un buen número de armónicas, ver tabla 4, por lo tanto, no se puede hablar de que alguna armónica influya determinadamente en la serie. Se puede decir que las armónicas que más influyen en la serie son la 1, 2, 3, 4, 7, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 25, 26, y 27; ya que la suma de sus porcentajes de contribución es de alrededor del 81%.

La figura 4, muestra la serie de Fourier filtrada, compuesta por la mitad del número de armónicas y se puede notar que representa, satisfactoriamente, la variación de la precipitación anual de la ciudad de Xalapa, Ver., durante el período de estudio.

Resultados

Cuando se analiza una serie de datos climatológicos, que varían con el tiempo, por algún método estadístico, como es el caso de las series de Fourier (también conocidas como series de tiempo), el propósito principal de investigar las fluctuaciones es, según Panosfky (1968):

a) Conocer las propiedades básicas de la serie de tiempo climática, tales como la variabilidad y características principales de sus oscilaciones periódicas o no periódicas.

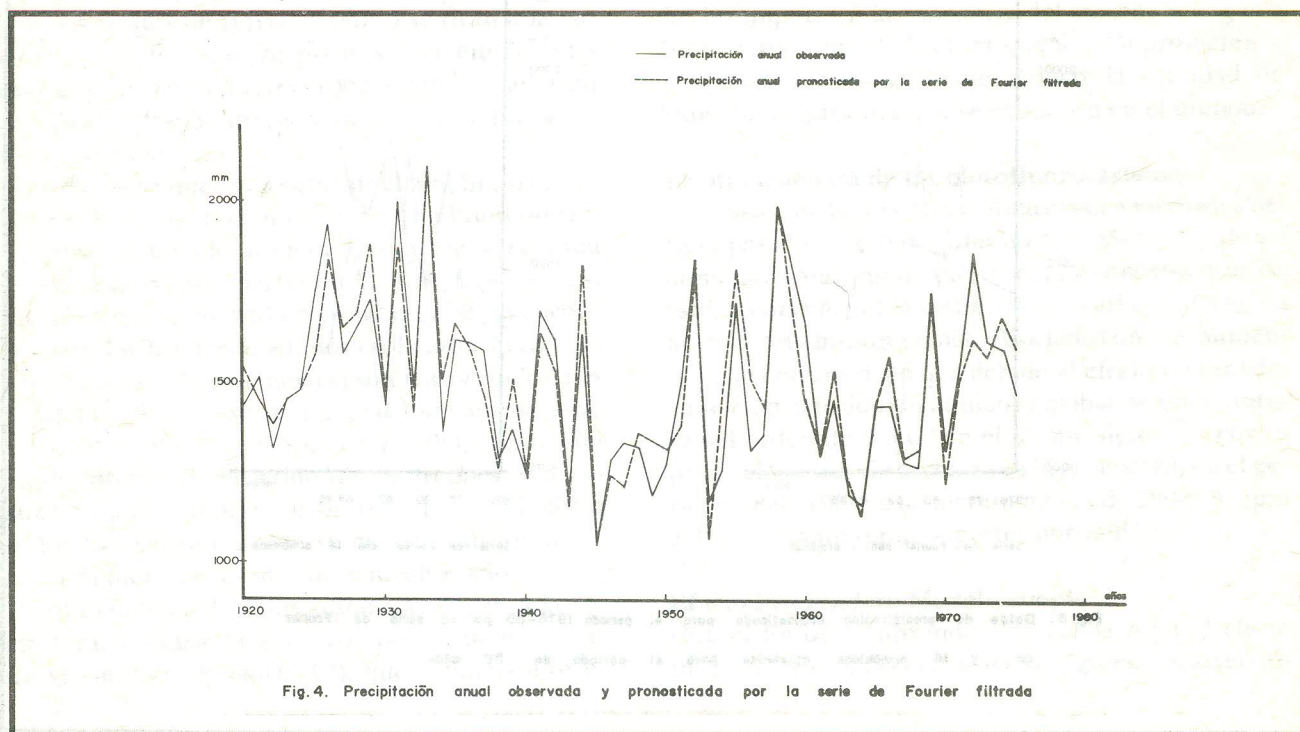


Fig. 4. Precipitación anual observada y pronosticada por la serie de Fourier filtrada

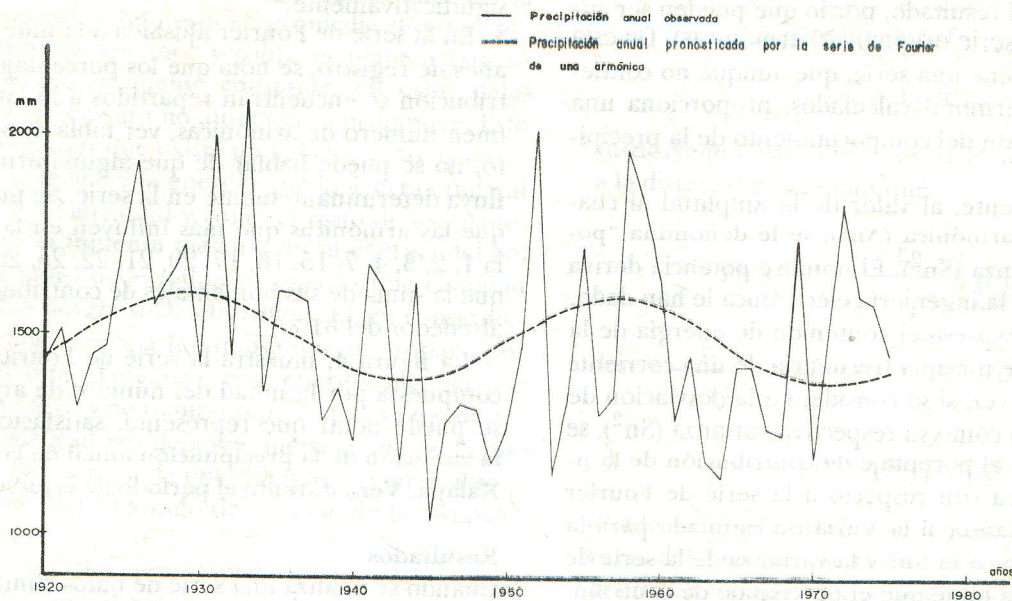


Fig. 5. Precipitación anual observada y pronosticada por la serie de Fourier de una armónica.

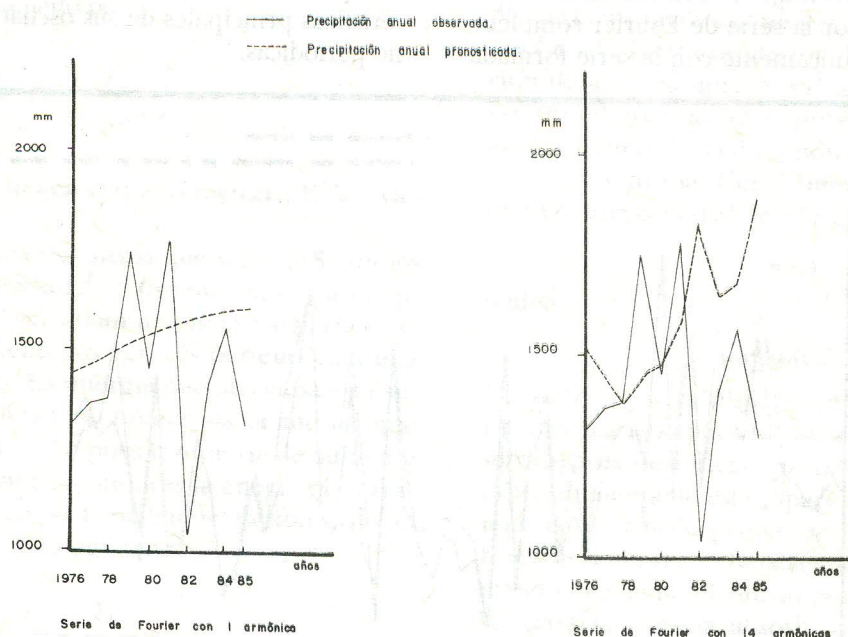


Fig. 6. Datos de precipitación pronosticada para el periodo 1976-85 por la serie de Fourier de 1 y 14 armónicas ajustadas para el periodo de 56 años.

b) Intentar predecir el comportamiento de la serie de tiempo climática.

En base a lo anterior, los datos de precipitación anual de la ciudad de Xalapa, Ver., analizados por medio de la serie de Fourier mostraron las características que a continuación se mencionan:

1.- La tendencia principal de la precipitación anual en el período comprendido entre 1920 y 1975, se muestra en la figura 5. Esta curva representa a la serie de Fourier formada por la media de los datos (armónica 0) y la armónica de mayor amplitud o mayor porcentaje de contribución (armónica 2). Es posible observar cómo la lluvia muestra un aumento general a partir de 1920 hasta aproximadamente 1930, a partir de 1931 la tendencia es negativa hasta 1943, donde esta marca el valor más bajo (el valor más bajo observado en este período fue en 1945). El ciclo se repite, con un aumento gradual hasta 1957, descendiendo nuevamente hasta un mínimo en 1971. Cabe aclarar que, al mencionar que existe aumento o disminución en la precipitación en cierto período, no se afirma categóricamente que un año tendrá mayor precipitación que el anterior y el siguiente aún mayor, o lo contrario en el caso de descenso. Lo que se quiere dar a entender es que se considera a todo el período en promedio, por arriba o por abajo de su valor promedio. De esta manera pueden existir años secos dentro de un período, que en general, se considera como lluvioso, o por el contrario, años lluviosos dentro de un período considerado como seco. Esto se debe a la forma tan aleatoria con que los fenómenos meteorológicos se presentan en el país, año con año.

2.- En la fig. 4, la serie formada por las 14 armónicas de mayor peso proporciona una buena idea de la variación de la precipitación en el tiempo, lo cual indica que no es necesario considerar la serie completa para tratar de pronosticar la precipitación anual de una región cualquiera.

3.- Que la precipitación, al igual que muchas variables climáticas, se comporta de una forma tal, que podemos considerarla periódica. Lo cual permite, si se cuenta con una buena muestra de datos, inferir, en base a la tendencia principal obtenida de la muestra, el comportamiento futuro que seguirá ésta. De este modo, cabría esperar para Xalapa, Ver., un ascenso gradual a partir de 1976 hasta 1985, ver fig. 6, en la cual se prolongaron las Series de Fourier de una y catorce armónicas, estando formada la primera por la armónica de mayor peso y la segunda por las catorce de mayor contribución. Se observa, claramente, cómo estas curvas pronostican, con buena

aproximación, el comportamiento futuro de la precipitación anual, con excepción del año 1982, en el cual se presentó un evento extremo (sequía que afectó todo el país), y que no fue tomada en cuenta en el ajuste de la Serie.

Conclusiones y recomendaciones

1.- Las series de Fourier son una buena técnica para investigar los períodos principales que se presentan en una serie de datos climatológicos, como es el caso de la precipitación anual de Xalapa, Ver., donde se encontró una periodicidad de 28 años.

2.- Es posible obtener, si se conoce de antemano, la periodicidad de la precipitación en un lapso determinado, con las dos primeras armónicas únicamente la tendencia de ésta, en el tiempo.

3.- El cálculo de los porcentajes de contribución de cada una de las armónicas permite conocer la serie de Fourier óptima para pronosticar la variable climática analizada.

4.- El pronóstico de la precipitación anual debe considerarse como una aproximación estadística, ya que ésta es un fenómeno natural y por lo tanto se comporta de una manera completamente aleatoria, debido al gran número de variables climáticas que intervienen en el proceso que origina la precipitación pluvial.

5.- Este pronóstico puede ayudar a programar los riegos en las zonas agrícolas, así como a dar mantenimiento a plantas Termoeléctricas y Geotérmicas del país cuando la precipitación anual pronosticada se encuentre por arriba de la media, ya que esto permitirá almacenar en las presas una mayor cantidad de agua con la cual se generará la energía eléctrica que producen las Termoeléctricas y Geotérmicas que entren a mantenimiento.

6.- Es recomendable, para realizar un buen pronóstico, contar con la mayor cantidad posible de datos que se emplearán en el pronóstico para obtener los coeficientes de a_n y b_n de la serie.

7.- Es recomendable realizar un estudio similar sobre la precipitación anual promedio de otras regiones de la República Mexicana, para determinar los períodos secos y lluviosos, lo cual ayudará a planear la agricultura y la generación de energía hidroeléctrica del país.

Agradecimientos

La realización de este trabajo fue posible gracias a la colaboración del Departamento de Informática del Instituto de Investigaciones Sobre Recursos Bióticos del Estado de Veracruz, quien facilitó el paquete es-

tadístico empleado en este estudio, así como la computadora. También se agradece, por su valiosa colaboración, a la estudiante de Arquitectura, Dora Hipólito P. Russell, por haber realizado los dibujos de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

1. Bajpai, A. C., Calus, I. M. y Fairley, J. A.: *Matemáticas para estudiantes de Ingeniería y Ciencias*, Vol. 2 Limusa, 1979.
2. Conrad, V. y Pollak, L. W.: *Methods in Climatology*. Harvard University Press, 1973.
3. Davis, J. C.: *Statistics and Data Analysis in Geology*, John Wiley & Sons, 1973.
4. Escamilla, B. P. "Series de Fourier Aplicadas a la Precipitación Anual", Tesis de Licenciatura, Universidad Veracruzana, 1987.
5. Gellert, W., Kustner, H., Hellwich, M. y Kastner, H.: *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1975.
6. García, E. y Vidal, R.: "La Tendencia de la Precipitación en la Parte Central de México en los Últimos 50 Años". *Biótica* Vol 6, No. 1, 1981.
7. Kreyszig, E.: *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Vol. 1, LIMUSA.
8. Panofsky, H. A. y Brier, G. W.: *Some Applications of Statistics to Meteorology*, University Park, Pennsylvania, 1968.
9. Pereyra D. D., Palma, G. B. E. y Hernández, T. A.: *Análisis Estadístico y Probabilístico de la Precipitación en Xalapa, Veracruz, México*, Universidad Veracruzana, 1984.
10. Scheid, F.: *Análisis Numérico*, Schaum, 1972.
11. Stringer, E. T.: *Thecnics of Climatology*, W. H. Freeman and Company, 1972.
12. Wylie, C. R.: *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, McGraw Hill, 1969.

NUMERO DE LA ARMONICA	COEFICIENTE a_n	COEFICIENTE b_n
0	1497.11	0.00
1	74.98	60.76
2	-53.12	95.69
3	35.78	-52.04
4	-43.73	-77.85
5	-30.17	-22.83
6	-43.86	33.77
7	22.05	-88.42
8	-46.40	-29.80
9	0.00	33.19
10	52.07	-21.11
11	-3.86	54.77
12	-24.54	-3.18
13	22.40	38.01
14	19.83	4.85
15	-51.66	61.47
16	94.40	-22.50
17	-30.24	-74.20
18	-10.05	-2.59
19	-1.14	-16.47
20	-66.60	-5.80
21	83.05	44.42
22	-50.68	58.61
23	-16.34	44.18
24	-6.06	3.18
25	15.31	-64.22
26	70.72	-10.78
27	-61.59	60.97
28	-23.68	0.00

Tabla 1. Valores de los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier ajustadas para un período de 56 años.

AÑO	PRECIPITACION OBSERVADA	PRECIPITACION CALCULADA	NUMERO DE LA ARMONICA	AMPLITUD (A_n) en mm	ANGULO DE FASE (ϕ_n) en grados
1920	1435.8	1423.6			
1921	1515.2	1527.3	1	96.5	51
1922	1317.1	1304.8	2	109.3	331
1923	1451.1	1463.3	3	63.2	146
1924	1474.2	1462.1	4	89.3	209
1925	1743.2	1754.9	5	37.8	233
1926	1932.0	1920.4	6	55.2	237
1927	1585.8	1587.3	7	91.1	166
1928	1647.4	1635.7	8	55.2	237
1929	1728.5	1739.6	9	33.2	360
1930	1434.4	1432.2	10	56.2	112
1931	2000.2	2011.6	11	54.9	356
1932	1454.8	1443.3	12	24.7	263
1933	2095.1	2107.2	13	44.1	31
1934	1358.1	1346.2	14	20.4	76
1935	1616.8	1628.8	15	80.3	320
1936	1607.2	1594.9	16	97.0	103
1937	1588.2	1600.5	17	80.1	202
1938	1286.2	1274.0	18	10.4	256
1939	1369.8	1382.2	19	16.5	184
1940	1241.6	1229.1	20	66.9	265
1941	1691.0	1703.0	21	94.2	62
1942	1616.1	1603.9	22	77.4	319
1943	1190.8	1202.9	23	47.1	340
1944	1632.5	1620.9	24	6.8	298
1945	1041.6	1052.8	25	66.0	167
1946	1281.9	1270.3	26	71.5	99
1947	1330.5	1342.0	27	86.7	315
1948	1318.7	1307.1	28	23.7	270
1949	1179.3	1190.8			
1950	1271.5	1259.9			
1951	1477.6	1488.9			
1952	2036.0	2024.4			
1953	1156.1	1168.1			
1954	1352.7	1340.8			
1955	1723.5	1735.7			
1956	1303.9	1291.7			
1957	1357.0	1369.3			
1958	1983.9	1971.6			
1959	1842.0	1855.1			
1960	1652.4	1640.5			
1961	1294.5	1306.2			
1962	1456.8	1445.2			
1963	1192.0	1203.6			
1964	1156.2	1144.8			
1965	1436.4	1447.5			
1966	1435.8	1424.8			
1967	1275.1	1286.6			
1968	1260.1	1248.6			
1969	1752.8	1764.3			
1970	1199.1	1187.3			
1971	1545.8	1558.2			
1972	1850.7	1838.4			
1973	1614.4	1626.6			
1974	1590.4	1578.0			
1975	1465.8	1478.1			

Tabla. 2 Valores de precipitación observados y pronosticados por la serie de Fourier ajustada para un período de 56 años.

Tabla 3. Valores de la amplitud (A_n) y ángulo de fase (ϕ_n) de la serie de Fourier ajustada para un período de 56 años.

NUMERO DE LA ARMONICA	PORCENTAJE DE CONTRIBUCION
1	7.57
2	9.70
3	3.24
4	6.48
5	1.16
6	2.49
7	6.75
8	2.48
9	0.90
10	2.57
11	2.45
12	0.50
13	1.58
14	0.34
15	5.24
16	7.65
17	5.22
18	0.09
19	0.22
20	3.63
21	7.21
22	4.87
23	1.80
24	0.04
25	3.54
26	4.16
27	6.10
28	0.46

Tabla 4. Porcentaje de contribución de las armónicas que forman la serie de Fourier ajustada para un período de 56 años.