

Trilateración: Sismos, GPS, rayos y teléfonos celulares, y la XIX Olimpiada de Ciencias de la Tierra

Gómez Treviño, Enrique

egomez@cicese.mx

División de Ciencias de la Tierra, CICESE, Ensenada, Baja California, México.

Presentación

Es muy posible que el lector, al igual que millones de personas en el mundo, haya utilizado o lo hará en el futuro, localizadores que permiten saber con bastante precisión en dónde estamos. Los sistemas de posicionamiento global están en pleno desarrollo y pronto serán un lugar común, si no es que ya lo son. Su funcionamiento se basa en la primera fórmula de física que aprendemos en la escuela, $d=vt$, donde d representa distancia, v es velocidad y t es tiempo. Esta es la fórmula que intuitivamente utilizamos cuando viajamos en automóvil y deseamos saber dónde estaremos en una o dos horas con la velocidad que llevamos. Al final del recorrido miramos el reloj y minutos más minutos menos comprobamos que nuestra estimación era correcta. ¿Alguna duda sobre la medición del tiempo? Ninguna, excepto por aquello de la Teoría de la Relatividad de Einstein de que el tiempo no transcurre igual en la carretera, que no se está moviendo, que en un vehículo que se mueve con respecto a la carretera. Desde que se dio a conocer en 1905 esta teoría fue plenamente aceptada por la comunidad científica, pero desde entonces hasta la fecha para el común de los mortales esto es y seguirá pareciendo pura ciencia ficción.

Y sin embargo no es ciencia ficción. De hecho, ya pasó de la ciencia a la tecnología. Resulta que la medición del tiempo en el caso de los sistemas de posicionamiento global es extremadamente delicada, a tal grado que se deben hacer correcciones según las teorías de la relatividad. En ciencia una teoría no es una creencia sino un conjunto de conocimientos comprobados. En el caso de las teorías de Einstein no sólo han sido comprobadas por otros científicos sino que ya hasta las utilizamos a diario millones de personas, aunque no nos demos cuenta.

En esta la XIX olimpiada abordamos el tema de localizaciones mediante el método que se conoce como trilateración. En realidad el método es muy antiguo. Actualmente se utiliza para localizar sismos y rayos así como en desarrollos tecnológicos recientes como los celulares y los sistemas de posicionamiento global. El método es muy simple y está perfectamente al alcance de estudiantes de preparatoria. Además, permite explorar otros temas como las órbitas de los satélites y las correcciones relativistas a las mediciones de tiempo.

En la XIX Olimpiada participaron quince escuelas preparatorias provenientes de los cinco municipios del estado: Mexicali, Tecate, Tijuana, Rosarito y Ensenada. Vannesa Carrillo Parra, estudiante del Colegio de Bachilleres (COBACH) plantel La Mesa, Tijuana, ganó el primer lugar; su asesor fue el profesor Manuel Armando Gómez Piñón. Por su parte, Martha Amisadai Ornelas Medina, asesorada por la maestra Rita Guevara Alcaráz, del Centro Educativo Patria de Ensenada, obtuvo el segundo lugar. José Raúl Prieto García del COBACH, plantel Baja California de Mexicali, regresó a la capital del estado con el tercer lugar que

logró con la asesoría de su profesor Diego Fernando Pérez Garibay. Los ganadores recibieron su constancia respectiva y una medalla así como premios en efectivo de 1,500 pesos para el primer lugar, 1,000 para el segundo y 750 para el tercero. Todos los participantes del concurso obtuvieron una constancia de participación y una playera conmemorativa. El evento fue patrocinado por la Unión Geofísica Mexicana (UGM), el CICESE y la APACICESE.

La guía de estudio que se presenta a continuación se da a conocer un mes antes del examen. El propósito es familiarizar a estudiantes y maestros con el tema del año y orientarlos en sus búsquedas en Internet. Después de la guía encontrarán las 25 preguntas sobre el tema de año, las cuales no se dan a conocer hasta el día del examen, a diferencia de las 75 restantes que fueron objeto de exámenes anteriores.

Trilateración: Sismos, GPS, rayos y teléfonos celulares. Guía para la XIX Olimpiada de Ciencias de la Tierra para estudiantes de preparatoria de Baja California. Viernes 30 de mayo de 2014. Auditorio de Ciencias de la Tierra. CICESE. Ensenada, Baja California.

Introducción

A mediados del mes de abril de 2014, a media noche, se pudo observar desde todo el país un eclipse total de Luna similar al que observó hace muchísimos siglos Aristarco de Samos. Se le dio mucho espacio en los medios de comunicación, pero para nada se mencionó la increíble hazaña del gran Aristarco, quien con sus observaciones y razonamientos determinó por primera vez el tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra. De haberlo mencionado, seguramente habría despertado la curiosidad de algunas personas para indagar al respecto, pero no se dijo nada, así es que ustedes son de los pocos afortunados que están en el secreto. Como han podido comprobar, las observaciones y razonamientos de Aristarco son una obra maestra digna de contarse una y otra vez. En estas olimpiadas será la cuarta y última vez porque este año el tema ya pasó al final de la fila.

Para esta XIX Olimpiada les preparamos un tema de actualidad relacionado con nuevas tecnologías como los teléfonos celulares y el sistema de posicionamiento global o GPS por sus siglas en inglés. Utilizaremos estas siglas para referirnos a este sistema porque así se le conoce comúnmente en todo el mundo. El tema en sí es el método que se utiliza para localizar un objeto en el espacio desde puntos alejados, como la triangulación, la cual dicho sea de paso ya era conocida por los antiguos griegos incluido Aristarco. El método, conocido como trilateración, se utiliza para localizar sismos y rayos además de celulares y receptores de GPS. Veremos detalles de cómo se utiliza el método en cada caso. Aprenderán incluso algunas consecuencias de las teorías de la relatividad de Einstein, de las dos, de la especial y de la general, las cuales pasaron de ser consideradas por el público como ciencia ficción para convertirse en una realidad, particularmente para quienes utilizan GPS, aunque no se den cuenta.

Trilateración: Planteamiento geométrico

La trilateración es una técnica geométrica para determinar la posición de un objeto conociendo su distancia a tres puntos de referencia. A diferencia de la más conocida técnica de triangulación, en la que se miden ángulos y distancias, en la trilateración se utilizan sólo distancias como se muestra en la Figura 1.

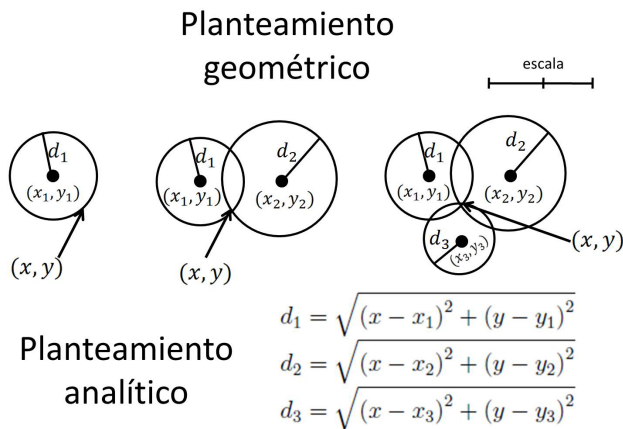


Figura 1. Planteamientos geométrico y analítico de la trilateración. El objetivo es localizar el punto (x, y) conociendo su distancia a tres puntos cuya localización se conoce.

Veamos primero el planteamiento geométrico. Si solamente conocemos la distancia del objeto al punto (x_1, y_1) , el objeto se podría encontrar en cualquier lugar alrededor del círculo de radio d_1 . Si ahora consideramos que también se sabe la distancia del objeto al punto (x_2, y_2) entonces las cosas empiezan a mejorar. El objeto podría encontrarse ya no en cualquier lugar alrededor del primer círculo. Tampoco podría encontrarse en cualquier lugar alrededor del segundo círculo. Solamente hay dos puntos en los dos círculos que cumplen con las dos condiciones de distancia. Estos dos puntos están definidos por las intersecciones de los círculos. Uno de los puntos debe ser la posición del objeto, pero no hay manera de saber cuál de los dos es el verdadero. Para determinar cuál es el verdadero necesitamos más información. Otro círculo que nos diga a qué distancia está el objeto de un tercer punto nos permitirá escoger entre las dos posibilidades. El tercer círculo centrado en (x_3, y_3) no puede sino interceptar a los otros dos en la posición del objeto, porque este punto es el único que está en los tres círculos y por lo tanto cumple con las tres condiciones de distancia.

Trilateración: Planteamiento analítico

Los argumentos geométricos anteriores eran conocidos por los antiguos griegos hace más de dos mil años. Para resolverlos sólo necesitaban regla y compás. No fue sino hasta el siglo XVII cuando René Descartes descubrió la manera de resolver este tipo de problemas con fórmulas de álgebra y así fundó la geometría analítica. Descartes inventó los ejes de coordenadas y mostró cómo las fórmulas de álgebra podían representar figuras geométricas como rectas, círculos, etc., así como encontrar sin hacer dibujos donde se interceptan. En el caso que nos ocupa se trata de tres ecuaciones simultáneas según se muestra en la Figura 1 como planteamiento analítico. Cada una es la representación de uno de los círculos mostrados en la parte de arriba. Resolviendo el sistema de ecuaciones se encuentra el punto donde se cruzan los tres círculos. Los cálculos necesarios se pueden realizar en una fracción de segundo en cualquier computadora, teléfono celular o receptor de GPS. Sin la geometría analítica de Descartes serían impensables las aplicaciones modernas de la trilateración. Sin embargo, las bases geométricas del método son más intuitivas y más fáciles de comprender y aplicar. En el examen tendrán la oportunidad de localizar con el método geométrico un teléfono celular, un receptor GPS, un sismo, y hasta un rayo. El planteamiento analítico lo dejaremos para otra ocasión.

Trilateración: La clave son las distancias

Tanto el método geométrico como el analítico requieren de dos cosas para poder aplicarse. Primero, se necesitan las posiciones de los tres puntos de referencia. En un mapa estos tres puntos se representan simplemente como eso, como tres puntos en un mapa, como en la Figura 1. Si se va a utilizar el método analítico se necesitan las coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) . Sin embargo, como dijimos anteriormente no utilizaremos el método analítico en esta ocasión.

De cualquier forma, estos puntos de referencia se conocen muy bien. En el caso de teléfonos celulares corresponden a las localizaciones de las antenas que se comunican con los celulares. En el caso de los receptores de GPS son las posiciones en el espacio de los satélites diseñados para tal fin. Por su parte, para la localización de sismos los puntos son las localizaciones de las estaciones sismológicas que registran los movimientos telúricos. En el último ejemplo que veremos, el de los rayos, las referencias son también estaciones o equipos especializados que reciben señales de los rayos. En todos los casos los tres puntos de referencia están muy bien localizados porque se sabe dónde se instalaron.

La otra cosa que se necesita para localizar un objeto mediante trilateración es conocer la distancia a cada uno de los puntos de referencia. ¿Cómo se calculan estas distancias? La respuesta es variada. En el caso de las antenas para celulares y de los satélites del GPS se utilizan señales que envían las antenas mismas y los satélites. Antenas y satélites envían una señal desde tres puntos diferentes y en el receptor se calcula la posición. En los otros dos casos, el de los sismos y los rayos, la situación es al revés: el objeto que se desea localizar es el que envía la señal y los puntos de referencia son los que la reciben. En estos casos los puntos de referencia son los que calculan la posición del objeto, ya sea un sismo o un rayo. En lo que sigue veremos cada caso en particular en lo relativo a cómo se calculan las distancias, y cómo se han superado algunas dificultades para que las localizaciones sean confiables.

Localización de teléfonos celulares

Contrariamente a la creencia popular, los celulares que tienen servicio de GPS no lo utilizan, o bien no lo utilizan en su totalidad y se apoyan más bien en la red local de antenas de la compañía telefónica. En este caso los tres puntos de referencia son antenas cercanas al celular. Para medir la distancia a cada antena se utiliza

el hecho de que la señal se hace más pequeña a medida que nos alejamos de la antena. La Figura 2 muestra esto gráficamente. Los tamaños de la señal en el receptor son enviados por Internet a una computadora central que calcula la posición utilizando el método analítico y la envía de regreso al receptor. Y en el receptor se grafica sobre un mapa y ya sabemos dónde estamos.

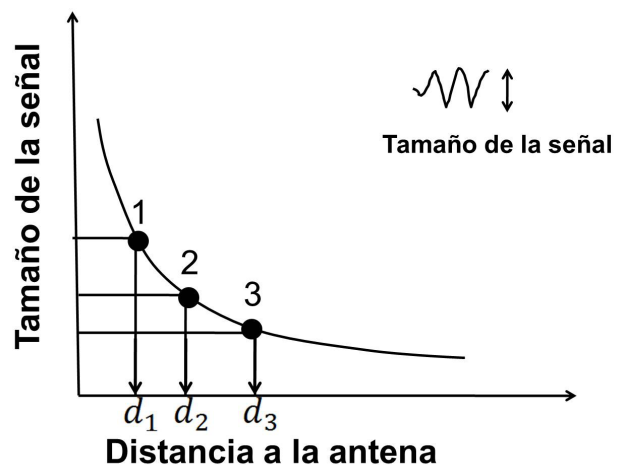


Figura 2. Tamaño de la señal en un teléfono celular que recibe información desde tres estaciones cada vez más lejanas. La atenuación de la señal se convierte a distancias y de ellas se calcula la posición del celular.

Localización mediante GPS

Aunque el concepto es muy sencillo, la ciencia y la tecnología detrás del GPS es una de las maravillas de la época actual. Para explicarlo nos apoyaremos en la Figura 3. Los puntos de referencia en este caso son satélites que orbitan alrededor de la Tierra. Estos satélites envían una señal electromagnética que viaja a la velocidad de la luz, y el receptor en la Tierra mide el tiempo de recorrido de las tres señales y las convierte en distancias, y con estas tres distancias se obtiene la posición del receptor, como se comentó anteriormente. Y esto es todo.

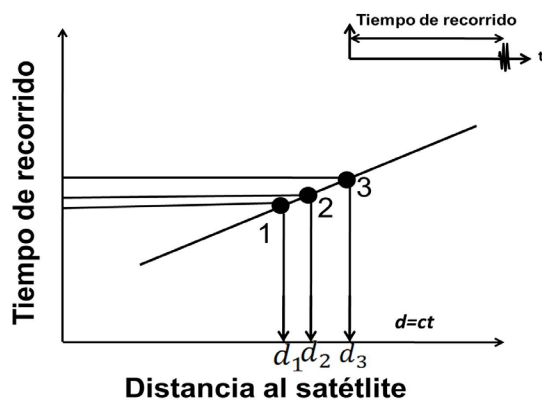
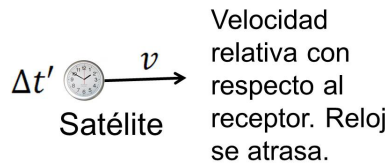


Figura 3. Tiempos de recorrido calculados en un receptor GPS que recibe señales desde tres satélites cada vez más lejanos. Los tiempos se convierten a distancias mediante la ecuación indicada y el receptor calcula su posición. En este caso no se trazan círculos sino esferas.

Y sin embargo, el cuento apenas comienza. Veamos primero un poco acerca de lo que es el GPS. Se trata de un conjunto de 24 satélites que orbitan a una altura de 20,000 km sobre la superficie de la Tierra. Esta distancia es un poco más de tres veces el radio de la Tierra que es de 6,370 km. Están distribuidos uniformemente de tal forma que siempre hay cuatro o cinco de ellos en línea de vista (aunque no se alcancen a ver) desde cualquier punto de la superficie de la Tierra. Tienen el tamaño y peso de un automóvil mediano y cada uno lleva en su interior un reloj muy, muy exacto, que prácticamente no se atrasa ni se adelanta. Mediante una antena se envía una señal de radio (1,500 Mhz), cuyo tiempo

de recorrido hasta el receptor sirve para medir la distancia entre satélite y receptor. El satélite funciona con energía solar y transmite la señal con una potencia ridículamente pequeña de apenas 50 Watts. En el receptor también debe haber un reloj que marque el momento de la llegada de la señal. Para saber el momento de emisión de la señal desde el satélite, el mismo satélite envía esa información al receptor. En el receptor se hace la resta de los dos tiempos y la diferencia se multiplica por la velocidad de la luz. El resultado es la distancia entre receptor y satélite. El receptor hace lo mismo con tres o más satélites y por trilateración se ubica a sí mismo.

Para tener una idea de lo exacto que deben ser los relojes consideren que en un microsegundo la luz viaja 300 m. Esto significa que si el reloj en el satélite y el reloj en el receptor difieren en un microsegundo, la ubicación tendrá un error de 300 m. Esto es demasiado. La tolerancia permitida es del orden de nanosegundos. Hay dos efectos que no tienen nada que ver con la calidad de los relojes pero que si no se corrigen producen errores mayores a los de un microsegundo. Se trata de cómo fluye el tiempo en diversas circunstancias. La teoría especial de la relatividad de Einstein predijo hace más de cien años que el tiempo fluye más despacio en un sistema de referencia que esté en movimiento. Esto significa que en el satélite, que se mueve a mucho más velocidad que un punto en la Tierra, un reloj tenderá a atrasarse. El efecto se ilustra en la Figura 4. El factor de corrección es equivalente a varios microsegundos al día.



Receptor en la Tierra.

Corrección relativista.

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Satélite

Gravedad es mucho menor aquí. Reloj se adelanta.



Receptor en la Tierra

Corrección por gravedad

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - r_s/r_T}$$

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2}$$

Figura 4. Corrección relativista (especial) del intervalo de tiempo.

Por otra parte, la teoría general de la relatividad de Einstein predijo hace casi 100 años que el tiempo fluye más lento a medida que aumenta la gravedad. Los satélites se encuentran a una altura en que la gravedad es muy pequeña en comparación con su valor en la superficie de la Tierra. En este caso un reloj en el satélite tenderá a adelantarse con respecto al situado en la Tierra. O sea que en la superficie de la Tierra el tiempo fluye más despacio que en el satélite. El efecto se ilustra en la Figura 5. La corrección supone que la gravedad es despreciable en la órbita del satélite en comparación con la gravedad en el receptor. Para mayor exactitud se debe aplicar la fórmula dos veces, una para el radio de la Tierra y la otra para el radio de la órbita y luego tomar la diferencia de tiempos. A la variable r_s se le conoce como radio de Schwarzschild. Si un objeto esférico de masa m tiene un radio menor al radio de Schwarzschild entonces ese objeto debe ser un hoyo negro. Allí el tiempo se detiene. La Tierra está muy lejos de ser un hoyo negro porque su radio de 6,370 km es mucho mayor que el radio de Schwarzschild que le corresponde por su masa.

Figura 5. Corrección relativista (general) del intervalo de tiempo. r_s se conoce como radio de Schwarzschild y r_T es el radio de la Tierra. G es la constante de gravitación de Newton, m la masa de la Tierra y c la velocidad de la luz. Esta corrección es mayor que la de la Figura 4.

Los relojes que son muy, muy exactos son también muy, muy caros. Cuestan mucho más que un automóvil de lujo. Y sin embargo, muchos automóviles y teléfonos celulares comunes tienen instalados receptores GPS. Como recordarán, todos los relojes deben ser igualmente exactos para que las distancias sean las correctas. ¿Cómo resolvieron este problema los diseñadores del sistema? Lo resolvieron de una manera muy ingeniosa que permite el equivalente de tener millones de relojes muy exactos en tierra aunque en realidad no lo sean tanto. Alguien tuvo la idea de utilizar la señal de un cuarto satélite y así tener una cuarta ecuación (ver la Figura 1). El tiempo entra como incógnita y se calcula junto con las coordenadas espaciales. Esto además permite sincronizar el reloj del receptor GPS. ¿Resultado? Coordenadas correctas y millones de relojes no muy buenos convertidos en muy, muy buenos, tan buenos como los que están en los satélites.

Localización de sismos y su magnitud en la escala de Richter

En el caso de celulares y GPS los puntos de referencia emiten una señal y el receptor es el objeto cuya posición se desconoce. En el caso de los sismos las cosas están al revés. Los puntos de referencia son los receptores, y el transmisor de la señal es el objeto cuya posición se desconoce. Esto es, el sismo produce la señal y las estaciones de registro la reciben y de alguna manera se coordinan y se calcula el lugar de origen. Una dificultad adicional en el presente caso es que no se sabe ni dónde ni cuándo ocurrió el sismo. Lo único que se tiene son los registros en las estaciones de medición. Es como si en el receptor GPS sólo se tuviera el tiempo de llegada de la señal, sin el aviso de los satélites de cuándo la enviaron. O sea que no se puede tomar la diferencia de tiempos y calcular las distancias y hacer los círculos correspondientes.

Afortunadamente en el caso de los sismos los registros muestran el arribo de dos tipos de onda, una rápida y otra más lenta. La más rápida llega primero a cualquiera de las estaciones (onda P), y la más lenta por supuesto que un poco después (onda S), según se ilustra en la Figura 6.

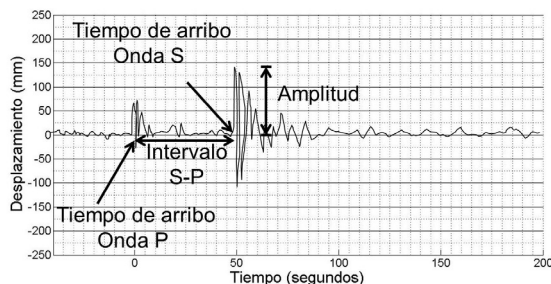


Figura 6. Esbozo de sismograma real. Tiempo cero es artificialmente asignado a la llegada de la onda P para facilitar el cálculo del tiempo S-P.

El tiempo de arribo de la onda S es mayor y el de la onda P es menor. Esto se ilustra en la Figura 7 para valores típicos de velocidades en la corteza terrestre. En esta figura también se grafica la diferencia de tiempos S-P. Se puede observar que la diferencia entre los tiempos de arribo de las ondas S y P se incrementa con la distancia entre el sismo y la estación, y que dada una diferencia de tiempos identifica una única distancia. Esto significa que con tres estaciones se pueden identificar tres distancias, y con esas tres distancias se puede aplicar trilateración y ubicar la posición del sismo en relación con las estaciones. La existencia de estos dos tipos de onda hace innecesario saber cuándo ocurrió el sismo, o en el caso de GPS, cuándo se emitió la señal.

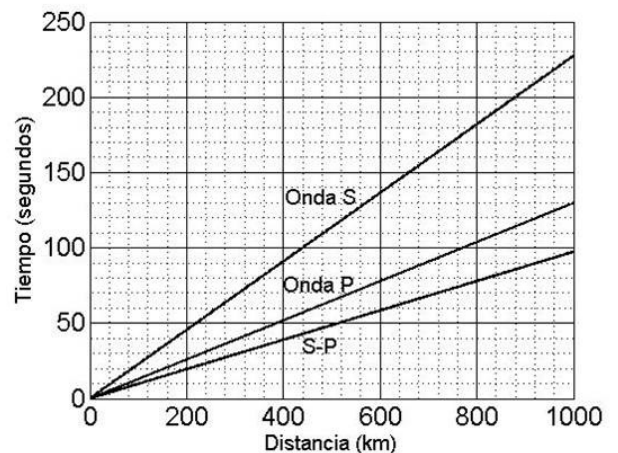


Figura 7. Tiempo de viaje de las ondas P y S en la corteza terrestre desde el origen de un sismo (Distancia=0) hasta estaciones distantes. Las ondas se propagan en todas direcciones por lo que sólo se grafica la distancia a la estación.

Además de la localización de un sismo, en los noticieros también se reporta su magnitud en la escala de Richter. Esta magnitud representa la energía liberada por el temblor, y es independiente de cómo se sintió en un lugar determinado, porque cómo se sintió depende si uno estaba cerca o lejos del epicentro. En la

Figura 8 se muestra cómo se puede calcular la magnitud, conociendo la distancia y la amplitud de la onda S según se muestra en la Figura 6. No importa la distancia ni la amplitud, la magnitud siempre es la misma.

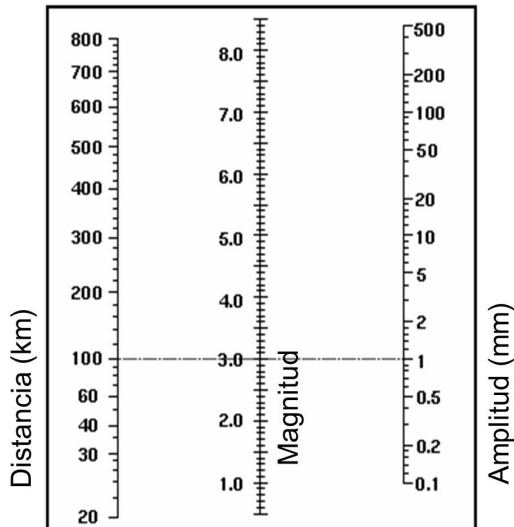


Figura 8. Calculadora gráfica para determinar la magnitud de un sismo en la escala de Richter. Las líneas rectas entre las mediciones en los sismogramas (izquierda y derecha) se cruzan en un mismo punto para todas las estaciones (la magnitud del sismo). En este ejemplo la magnitud es 6.4. La línea horizontal a 100 km es simplemente para referencia de sismos de magnitud 1.

Localización de rayos

Además de luz y sonido, los rayos emiten ondas de radio o electromagnéticas que viajan en el aire a la velocidad de la luz. Estas ondas son las causantes del ruido que se escucha en los aparatos de radio cuando hay tormentas eléctricas cercanas. Existen antenas especiales para detectar estas ondas y utilizarlas para localizar los rayos, de manera similar a como se localizan los sismos. Una de las diferencias es que en el presente caso las ondas viajan mucho más rápido. Aún así, es posible detectar y medir los tiempos de llegada a diferentes estaciones. En la Figura 9 se muestra la señal detectada en una estación cercana al

lugar donde cayó un rayo. Noten que en lugar de segundos la escala está en microsegundos. Con este tipo de señales se puede calcular la cantidad de carga eléctrica que se transfirió a la Tierra, así como la dirección del flujo, si fue un rayo positivo o negativo. Si se tienen varias estaciones de medición se puede calcular la posición utilizando trilateración. Determinar estas localizaciones es importante para ubicar incendios forestales así como encontrar el lugar preciso donde un rayo pudo haber dañado una línea de transmisión eléctrica.

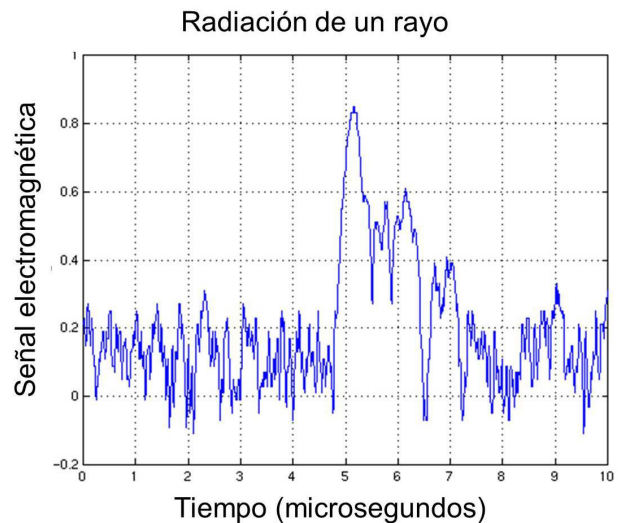


Figura 9. Señal electromagnética producida por un rayo que puede ser detectada a cientos de kilómetros de distancia por estaciones receptoras sensibles a señales en el rango de frecuencias de radio.

Otra diferencia con respecto a los sismos es que en las ondas electromagnéticas no existen dos tipos de ondas. En el caso de los sismos se aprovecha que las ondas P y S viajan a diferentes velocidades, y que la diferencia de tiempo de viaje define un círculo alrededor de la estación. En el caso de los rayos no se puede hacer lo mismo porque las ondas de radio sólo son de un tipo. No se puede tomar la diferencia tampoco con respecto al momento en que cayó el rayo, porque no se conoce ese momento. Esto quiere decir que no podemos trazar círculos alrededor de las estaciones como en los tres casos anteriores.

Es posible, sin embargo, localizar exactamente el rayo pero hay que realizar muchos cálculos. Lo mismo va para la localización de un sismo utilizando el tiempo de arribo de un solo tipo de onda. No vamos a extendernos aquí explicando estos métodos numéricos. Lo que vamos a hacer es presentarles un método muy, muy, pero muy ingenioso de localización que sólo requiere de saber el orden de las estaciones según fueron llegando las señales. En la Figura 10 se representan cuatro estaciones que recibieron la señal emitida por un rayo. La estación 1 la recibió primero, enseguida llegó a la 2 y así sucesivamente hasta la estación 4.

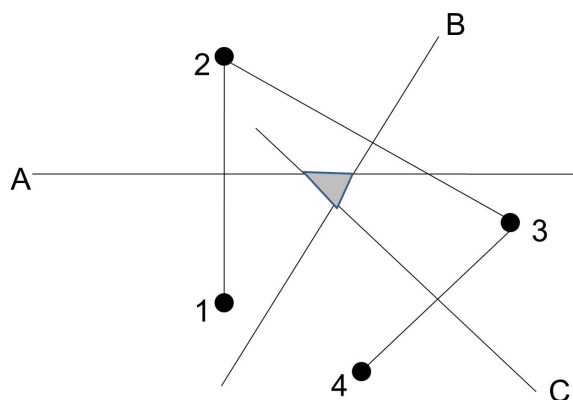


Figura 10. Método para estimar la localización aproximada de un rayo conociendo solamente el orden en que llega la señal a cuatro estaciones. El orden ascendente en la numeración de las estaciones indica también el orden en que llega la señal.

El método es muy simple. Consiste de aplicar el mismo sentido común tres veces. El sentido común consiste en trazar primero una línea recta entre las estaciones 1 y 2. Enseguida trazamos la línea A, perpendicular a la anterior, y a la mitad del camino entre las estaciones 1 y 2. Y aquí viene el sentido común. Como la señal llegó primero a la estación 1, es obvio, obvio, que el rayo debió caer en alguna parte por debajo de la línea A. Haciendo lo mismo con las estaciones 2 y 3, concluimos que el rayo debió caer a la izquierda de la línea B, porque llegó primero a la estación

2. Haciendo lo mismo con las estaciones 3 y 4, llegamos a la conclusión que el rayo debió caer a la derecha de la línea C, porque llegó primero a la estación 3 que a la 4. La intersección de las tres regiones es el triángulo sombreado que se muestra en la Figura 10. En este triángulo debió de caer el rayo. Ensayen ustedes con estaciones en diferentes lugares y con órdenes distintos en la llegada del rayo para que practiquen el método.

Recomendaciones

Practiquen la localización de sismos proponiéndose entre ustedes problemas inventados. Uno de ustedes suponga tres estaciones y la localización de un sismo, consulten las curvas de S-P e inventen los tres sismogramas. Pasen esos sismogramas a sus compañeros y pidan que localicen el temblor. Pueden hacer lo mismo con la magnitud en la escala Richter. Lo mismo va para los celulares, GPS y los rayos. Discutan entre ustedes y con sus maestros. Vean en Internet artículos y videos al respecto, etc. Con respecto a GPS lo más impresionante son las correcciones, porque la idea es tan simple como calcular distancias con la fórmula $d = vt$, la más elemental de las fórmulas en física. Las correcciones relativistas requieren evaluar la expresión $\sqrt{1+x}$. Esto se puede hacer fácilmente en una calculadora. Sin embargo, cuando x es muy pequeña, como en el presente caso, puede ser que tengan problemas dependiendo de la calculadora. Busquen la aproximación de esa raíz cuadrada para el caso en que x es muy pequeña. En cuanto a las teorías de Einstein no le busquen mucho, no son temas de preparatoria. Lo que incluimos aquí es suficiente. Sin embargo, las fórmulas para las correcciones no son complicadas y se espera que las puedan evaluar y manejar. También es conveniente que revisen la fórmula de la velocidad de un satélite en función del radio de la órbita, suponiendo que la fuerza centrípeta es la fuerza de gravedad que le ejerce la Tierra. Ah, y no se olviden: traigan calculadora, escuadra y compás.

El examen

Como siempre, en total serán 100 preguntas. Sobre el presente tema de trilateración serán 25 preguntas. Estas 25 preguntas tendrán un valor de 3 puntos cada una para un valor total de 75 puntos. Traigan su calculadora así como un compás y una escuadra porque los van a necesitar para las localizaciones. Sobre La Fórmula del Calentamiento Global (XVIII Olimpiada) serán 25 preguntas. Sobre Gaia serán 20 (XVII Olimpiada), sobre Aristarco de Samos (XVI Olimpiada) serán 30. Rayos y Centellas (XV Olimpiada) queda fuera y no habrá preguntas al respecto. Estas 75 preguntas las pueden consultar en los informes correspondientes a las olimpiadas mencionadas, que están disponibles en esta misma página (<http://olimpiadas.ugm.org.mx>). Estas 75 preguntas tendrán un valor de 1/3 de punto cada una para un valor total de 25 puntos. Para los que no han asistido a nuestras olimpiadas se les recomienda ver en YouTube: <http://www.youtube.com/watch?v=Q5d-4HvP32U>

Inscripciones

Por favor recuerden que es muy conveniente para nosotros que se inscriban con anterioridad en forma individual llenando el formato de inscripción (<http://olimpiadas.ugm.org.mx/index.php?page=olimpiadas-xix-inscripciones>), porque nos permite planear mejor la cantidad de exámenes que debemos imprimir, preparar un día antes los gafetes con sus nombres, imprimir los diplomas de participación, el número de mesas y sillas que necesitaremos, así como la cantidad de comida que debemos ordenar. Por lo general recibimos a alrededor de 90 participantes. Aunque nunca hemos puesto límites, si es necesario limitaremos a 100 el número de participantes por cuestiones de cupo en el auditorio.

Pan, café, chocolate y frutas para quienes no hayan desayunado. De 8:00 a 10:00 AM se entregarán los gafetes con sus nombres. A las

10:00 AM inicia el examen y se termina a las 12:01 PM. Antes de la comida tendremos, como siempre, la visita a varios laboratorios incluyendo la red sismológica donde se reciben las señales de los sismos que ocurren en Baja California. Entre las 2:00 y 3:00 PM se harán las premiaciones.

Saludos cordiales y buena suerte. Los esperamos en Ensenada.

Atentamente,

Dr. Enrique Gómez Treviño.
Coordinador de las Olimpiadas

Las 25 preguntas del examen nuevo

1. La localización de un sismo se puede realizar utilizando sismogramas de al menos tres estaciones. El procedimiento normal es medir en los sismogramas el intervalo de tiempo entre la llegada de las ondas S y P. Estos tiempos son de 20 segundos para la estación A, de 30 s para la B y de 40 s para la C. Estos intervalos de tiempo se convierten a distancias utilizando la curva S-P que se incluye más abajo como Figura 1. Las coordenadas de las estaciones son A(100,100), B(400,300) y C(150,390), donde los números representan kilómetros, el primero corresponde a la coordenada horizontal y el segundo a la vertical en un sistema estándar (x,y). El origen del sistema de coordenadas y la escala del mismo ustedes los definen en el papel milimétrico que se les provee. Una escala de 1 cm por cada 100 km está bien. Menos de eso se pierde mucha resolución. Con 2 cm por cada 100 km se obtiene mejor resolución que con 1 cm. Sin embargo, con más de 2 cm los círculos resultan muy grandes y el compás puede ya no serles útil. No importa la escala que utilicen, en ese mismo sistema el epicentro del sismo es

- | | |
|--------------|--------------|
| a) (270,0) | b) (500,600) |
| c) (100,300) | d) (220,240) |

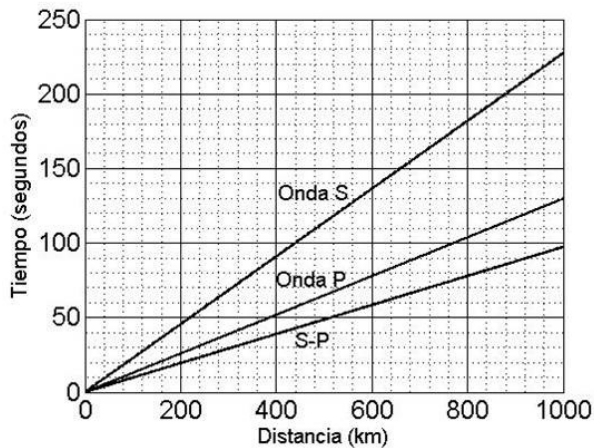


Figura 1

2. En un segundo temblor el intervalo de tiempo S-P para la estación A es de 40 s, también de 40 s para la estación B, y de 55 s para la C. Las estaciones están en los mismos lugares: A(100,100), B(400,300), C(150,390). El epicentro en este caso se localiza en las coordenadas

- a) (270,100) b) (50,600)
c) (440,-100) d) (-100,500)

3. En un tercer temblor en la misma área se perdió mucha información sobre los sismogramas. Lo único que se sabe es el orden en que llegó la onda P a las mismas tres estaciones A(100,100), B(400,300), C(150,390). Sin embargo, ahora se cuenta con una cuarta estación D(150,50). Lo único que se sabe es que la onda P llegó en el orden A,B,C y D. O sea, llegó primero a la estación A y al último a la estación D. Localizar el temblor. El epicentro está en

- a) (270,300) b) (250,200)
c) (440,-100) d) (-100,500)

4. Ahora pasamos a uno de los métodos que se utilizan para localizar teléfonos celulares. En los problemas anteriores los tiempos de arribo de las ondas sísmicas son la clave para localizar los temblores. En el caso de los celulares son las amplitudes de la señal las que dan la clave para determinar la distancia a las antenas. En este caso las antenas están en las coordenadas A(3,1) B(7,3.5) y C(5,5). El tamaño de la señal de cada antena se mide en el celular y éste envía esa información a una de las antenas. La información termina en una computadora que calcula la posición del celular convirtiendo los tamaños a distancias como en la Figura 2 y aplicando trilateración, y esa posición se la envía de regreso al celular. Y así el celular nos dice donde estamos. Los tamaños de la señal de las tres antenas son A=1, B=0.05 y C=0.07. Obtener la posición del celular. La posición es

- a) (3.8,0.5) b) (2.5,0.0)
c) (2.0,1.0) d) (2.75,2.00)

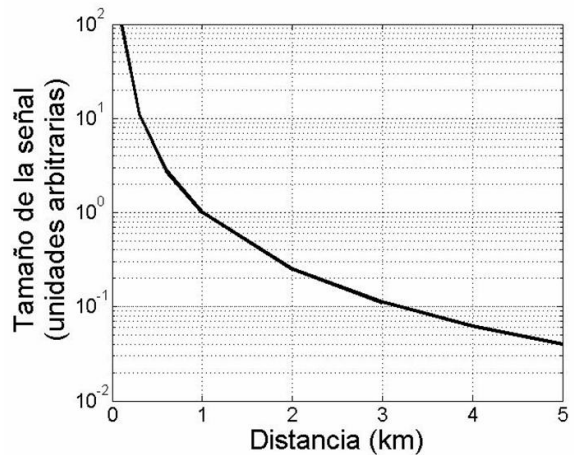


Figura 2

5. Suponer ahora que la información numérica de los tamaños de la señal de las antenas se ha perdido, y que sólo se sabe el orden de los tamaños. Las estaciones son las mismas A(3,1), B(7,3.5) y C(5,5). Sin embargo ahora se cuenta con una cuarta estación D(4,0.5). Suponer que la antena A tiene el mayor tamaño, seguida por la B, luego por la C, y finalmente la antena D es la del menor tamaño de señal. ¿Dónde está el celular?

- a) (4.5,2.5) b) (6,2) c) (2.0,1.0) d) (6,4)

6. La magnitud de un sismo representa la energía que emite en la forma de ondas que se propagan en todas direcciones. Al igual que el sonido, que entre más lejos de la fuente se oye menos, así las ondas sísmicas, entre más lejos del epicentro menos amplitud tienen. La relación entre magnitud, distancia al epicentro y amplitud del sismograma se muestra en la Figura 3. Esta relación se obtuvo comparando diferentes sismos a diferentes distancias y calibrando los instrumentos registradores. Para determinar la magnitud basta con la amplitud de un solo sismograma y éste puede provenir de cualquier estación, con tal de saber su distancia al epicentro. Sin embargo, siempre es conveniente tener más de una estación para comprobar las magnitudes. Suponer que la estación A (400 km del epicentro) registra una amplitud de 400 mm, la B (500 km del epicentro) registra una amplitud de 180 mm, y una tercera C(700 km) registra una amplitud de 50 mm. ¿Cuál fue la magnitud del temblor?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

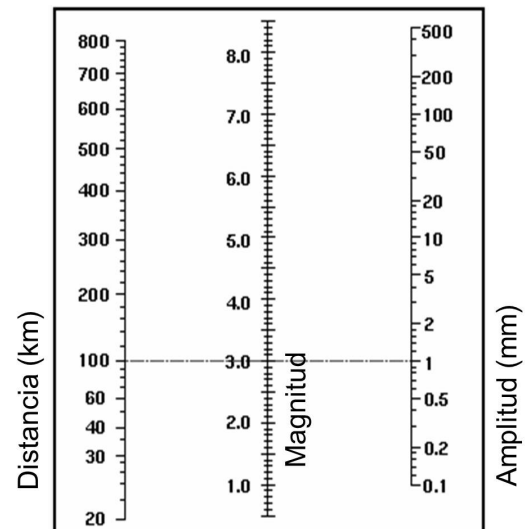


Figura 3

7. Un sismo de magnitud 5 y otro de magnitud 5.5. ¿Cómo se comparan las amplitudes en un lugar determinado? ¿Cuántas veces es mayor la de 5.5 que la de 5?

- a) 0.5 b) 2.5 c) 3.2 d) 5

8. El sismo de enero de 2010 en Haití fue de magnitud 7.0. El de Mexicali de abril del mismo año fue de 7.2. Obviamente las amplitudes de las ondas sísmicas fueron mayores en este último si comparamos sismogramas de estaciones que estén a la misma distancia de sus respectivos temblores. Tomando como referencia el sismo de 7.0, ¿Qué tanto son mayores las oscilaciones del sismo de magnitud 7.2 que las del de magnitud 7.0?

- a) 2 % b) 30 % c) 60 % d) 80 %

9. Determinar la amplitud de un sismograma registrado en Tijuana debido a un sismo de magnitud 8 que ocurra en el área de San Francisco, a 700 km de Tijuana. Esa misma amplitud se puede registrar en Tijuana pero asociada a un temblor en Mexicali pero de menor magnitud, ya que Mexicali está más cerca de Tijuana que de San Francisco. Determinar la magnitud de ese temblor suponiendo una distancia de 200 km entre Tijuana y Mexicali. La magnitud es

- a) 5.4 b) 5.8 c) 6.0 d) 6.2

10. Por lo general a mayor distancia del epicentro de un sismo menor es la amplitud de los sismogramas y también los daños son menores. Sin embargo, esto no siempre es así porque las amplitudes también dependen del tipo de suelo en que se encuentre la estación sísmica o las construcciones susceptibles de ser dañadas. Los suelos blandos oscilan con mayor amplitud que la roca dura al recibir el efecto de las ondas de un sismo lejano. Gran parte de la Cd. de México descansa sobre lo que en tiempos de los aztecas era un lago, el cual poco a poco se fue rellenando con materiales blandos por lo que las ondas sísmicas tienen grandes amplitudes aunque los sismos ocurran en las costas de Guerrero, Oaxaca o Michoacán, a varios cientos de kilómetros. En Baja California, a lo largo de la frontera, tenemos poblaciones que reposan sobre diferentes tipos de suelo, y una de ellas se parece más a la Cd. de México que las otras en cuanto a que descansa sobre sedimentos recientes. En el caso de un sismo de gran magnitud en San Francisco, California, ¿Qué región en la frontera sentiría las mayores amplitudes, suponiendo que todas las regiones están a la misma distancia del epicentro?

- a) Tecate b) Mexicali c) Rumorosa d) Tijuana

11. Los satélites que circulan alrededor de la Tierra lo hacen, al igual que la Luna, sin la necesidad de cohetes propulsores. Lo único que necesitan es una velocidad tangencial suficiente para mantenerse en su órbita. En el caso de la Luna, esa velocidad la traía la propia Luna cuando fue atrapada por la gravedad de la Tierra hace muchísimo tiempo. A los satélites se les proporciona esa velocidad cuando son lanzados al espacio. La velocidad se determina dependiendo del radio de la órbita en que se desee poner al satélite. En el caso de los satélites del GPS este radio es de 26,370 km (20,000 km sobre la superficie de la Tierra más 6,370 del radio de la Tierra). Si la velocidad tangencial es muy pequeña el satélite podría caer a la Tierra, y si es muy grande podría escaparse de la influencia de la Tierra y perderse en el espacio. ¿Cómo se puede calcular la velocidad exacta para que el satélite se mantenga en la órbita deseada? El método es muy ingenioso y ya había sido anticipado por Newton hace alrededor de tres siglos. La solución es igualar la fuerza centrípeta requerida por el satélite a la fuerza de la gravedad de la Tierra en el radio deseado. No podemos modificar la fuerza de la gravedad a nuestra voluntad, pero sí podemos controlar la fuerza centrípeta mediante la velocidad tangencial que le demos al satélite. La fuerza centrípeta que se requiere para mantener a un satélite de masa m a un radio de órbita r y a una velocidad v es

- a) $F_c = m (v/r)$ b) $F_c = m (v/r^2)$
c) $F_c = m (v^2/r)$ d) $F_c = m \sqrt{(v/r)}$

12. La fuerza de gravedad que ejerce la Tierra (masa M) sobre un satélite (masa m) que orbita a un radio r se puede calcular mediante la ley de la gravitación de Newton. Si G representa la constante gravitacional, esta ley se expresa como

- a) $F_g = G (Mm/r^2)$ b) $F_g = G (Mm/r)$
c) $F_g = G \sqrt{(Mm/r)}$ d) $F_g = G ((\sqrt{Mm})/r^2)$

13. Igualando las fuerzas centrípeta F_c y gravitacional F_g se llega a la expresión para calcular la velocidad que debe tener un satélite que orbita a una radio r . Esta expresión es

- a) $v = \sqrt{GMm/r}$ b) $v = \sqrt{GM/r^2}$
 c) $v = (GM/r)m$ d) $v = \sqrt{GM/r}$

14. La fórmula anterior se puede reescribir para encontrar el radio de la órbita en función del periodo. El periodo es el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a la Tierra. Esta fórmula es

- a) $r = \sqrt{GM (T^2/4\pi^2)}$
 b) $r = \sqrt[3]{GM (T^2/4\pi^2)}$
 c) $r = \sqrt[4]{GM (T^2/4\pi^2)}$
 d) $r = \sqrt[3]{GM (T^2/4\pi)}$

15. Los satélites del GPS giran alrededor de la Tierra con un periodo de 12 horas, en lo que se conoce como la órbita media. Por otra parte, los satélites geoestacionarios tienen un periodo de 24 horas, y giran en lo que se conoce como la órbita alta. Estos últimos giran a la misma velocidad angular de la Tierra, de tal forma que desde nuestra perspectiva parece que no se mueven. De aquí lo del nombre de geo-estacionarios porque están como estacionados con respecto a nosotros. Los satélites que transmiten canales de televisión son de este tipo, por eso las antenas parabólicas reciben continuamente la señal sin tener que cambiar de su dirección. Por su parte, los satélites del GPS que tienen periodos de 12 horas aparecen y desaparecen en el horizonte dos veces al día. Según la fórmula del problema anterior el radio de la órbita de los satélites geoestacionarios es mayor que la de los del GPS por un factor. El factor es

- a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[4]{3}$

16. La mayor parte de los satélites que orbitan la Tierra lo hacen en lo que se conoce como la órbita baja, a menos de 2,000 km de la superficie de la Tierra. La estación espacial internacional (ISS por sus siglas en inglés) gira en la órbita baja a una altura sobre la superficie de la Tierra de

- a) 400 km b) 800 km
 c) 1,600 km d) 2,000 km

17. La estación espacial internacional gira alrededor de la Tierra en un círculo que hace un ángulo de 52 grados con respecto al ecuador. Los satélites del GPS, que son muchos, giran a diferentes ángulos con respecto al ecuador, de tal forma que se reciben señales de al menos 4 o 5 de ellos en cualquier punto sobre la superficie de la Tierra. Por su parte, los satélites geoestacionarios deben circular en órbitas que tengan un ángulo con respecto al ecuador de

- a) 45° b) 0° c) 90° d) 52°

18. La corrección relativista por efectos de la velocidad del satélite contiene el factor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, donde v es la velocidad del satélite y c es la velocidad de la luz. Cuando $v \ll c$, como en el caso de los satélites, esta expresión se puede aproximar como $1 + algo$. Este *algo* es el factor de corrección. ¿Cuál es de los cuatro?

- a) $-(v^2/2c^2)$ b) $+(v^2/2c^2)$
 c) $-(v^2/c^2)$ d) $+(v^2/c^2)$

19. La corrección relativista por efectos de la gravedad contiene el factor $\sqrt{1-r_s/r_T}$, donde r_s es el radio de Schwarzschild de la Tierra y r_T es el radio real de la Tierra. Cuando $r_s \ll r_T$, como en el presente caso, esta expresión se puede aproximar como $1 + algo$. Este *algo* es el factor de corrección. ¿Cuál es de los cuatro?

- a) $-(r_s/r_T)$ b) $+(r_s/r_T)$
 c) $-(r_s/2r_T)$ d) $+(r_s/2r_T)$

20. Utilizando las fórmulas aproximadas para las correcciones relativistas, encontrar el radio de la órbita en donde las correcciones, la de la relatividad especial y la de la relatividad general son iguales pero de signo contrario, de tal forma que un satélite en esa órbita no necesita correcciones por efectos relativistas. Van a necesitar: a) La fórmula de la velocidad del satélite (v) en términos del radio de la órbita (r_o); b) El radio de Schwarzschild de la Tierra $r_s = 2GM/c^2$; c) La diferencia del efecto de gravedad entre r_o , el radio de la órbita y r_T , el radio de la Tierra. El radio de la órbita es

- a) $r_o = 1.5r_T$ b) $r_o = 2r_T$
 c) $r_o = 2.5r_T$ d) $r_o = 3r_T$

21. Las estaciones en el caso del GPS están separadas por decenas de miles de kilómetros. Las estaciones en este caso son los satélites. Es obvio que con la escala apropiada podemos representar en el papel milimétrico distancias de decenas de kilómetro. Sin embargo, aparece un problema cuando utilizamos el compás porque en esa escala el ancho de las líneas del compás equivale a muchos kilómetros. En otras palabras, el método de compás no permite discernir localizaciones del orden de metros, que es lo que requiere el GPS. En la práctica el GPS hace los cálculos en su computadora con el método analítico. Supongan estaciones separadas por 10,000 km: ¿Si en el papel esto se escala a 10 cm, cuántos kilómetros representa un milímetro?

- a) 0.1 b) 1 c) 10 d) 100

22. Supongan que están encargados de diseñar un nuevo sistema de satélites para localización y que ustedes se comprometen a que el sistema tenga como máximo un error de 3 m. Considerando solamente la precisión de los relojes, estos no deberán retrasarse o adelantarse más de

- a) 0.000001 s b) 0.00000003 s
 c) 0.00000001 s d) 0.0000001 s

23. El efecto relativista neto combinando los efectos de la velocidad y la gravedad para el GPS es de 0.45 ns/s (ns=nanosegundos). Como cualquier reloj que se adelanta o se atrasa, el efecto es acumulativo, de tal forma que entre más tiempo pasa el error se hace mayor. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el efecto relativista acumulado sea igual a la solución del problema anterior?

- a) 22 segundos b) 22 minutos
 c) 22 horas d) 22 días

24. Si los efectos relativistas se dejan de corregir por un día las mediciones de distancia tendrían un error de

- a) 11 m b) 110 m c) 1,100 m d) 11,000 m

25. En la órbita de los satélites del GPS el efecto de la gravedad (teoría general de la relatividad) es mayor que el efecto de la velocidad (teoría especial de la relatividad). ¿Cuántas veces es mayor, en valor absoluto, el primer efecto que el segundo?

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

Recibido: 5 de septiembre de 2014

Recibido corregido por el autor: 7 de septiembre de 2014

Aceptación: 27 de noviembre de 2014