

UNA INTRODUCCION A LA INVERSION UNIDIMENSIONAL DE SISMOGRAMAS: LOS CASOS DE DECONVOLUCION DINAMICA Y FILTRADO DE WIENER

Marco Antonio Torres Vera * Sergio Chávez Pérez **, ***

*Posgrado en Geofísica Instituto de Geofísica, UNAM Cd. Universitaria, Circuito Exterior, Del.Coyoacán México, D.F. 04510 México.

**Centro de Investigación Sísmica Fundación Javier Barros Sierra, Carretera al Ajusco 203 Col. Héroes de Padierna México, DF. 14200 México.

***Departamento de Ingeniería de Recursos Energéticos y Minerales, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM Ciudad Universitaria, Circuito Exterior, Del.Coyoacán México, DF., 04510, México.

RESUMEN

El problema principal en el cálculo de los coeficientes de reflexión de sismogramas es la inestabilidad del proceso de inversión debido al ruido. El problema se ataca con dos métodos de inversión para sismogramas de reflexión de incidencia normal. El modelo consiste en una serie de capas elásticas de homogeneidad lateral, sobreyaciendo un semiespacio elástico. El primer método calcula directamente los coeficientes de reflexión del sismograma y se conoce como "Deconvolución Dinámica". El segundo método, aquí llamado "Filtro Inverso", es un proceso de dos fases: 1) la construcción de un filtro causal por factorización de la función por medio de la recursión de Levinson y 2) el filtrado del sismograma. El sismograma filtrado es una buena aproximación para la secuencia de los coeficientes. Se demuestra que, pese a lo sencillo de ambos métodos, se pueden obtener muy bien los coeficientes de reflexión.

INTRODUCCION

El problema se ataca por dos cuestiones 1) cuando en el algoritmo y en el modelo se introduce inestabilidad de ruido y 2) como un método de estabilización eficiente (Robinson, 1982). Estas preguntas se responden en la primera sección. En la segunda parte la respuesta está dada por la recursión de Levinson en el cálculo de los coeficientes del filtro inverso para la función espectral (Robinson y Treite, 1977, 1978). Para ambos procedimientos los resultados de la estabilización se muestran con sismogramas sintéticos, usando un pulso descendente de onda plana que incide normalmente en un apilamiento de capas elásticas, de homogeneidad lateral y con igual tiempo de viaje. Además, se agrega ruido blanco aleatorio en los sismogramas.

La notación que se adopta es $x(j)$, $j = 1, \dots, n$, es un pulso de reflexión del sismograma, $w(j)$, $j = 1, \dots, n$, es el ruido blanco con varianza σ^2 , $\hat{x}(j) = x(j) + w(j)$, $j = 1, \dots, n$, es el sismograma ruidoso y $r(j)$, $j = 1, \dots, n$, la secuencia de los coeficientes de reflexión y $X(Z)$, $W(Z)$ y $R(Z)$ denotan sus correspondientes transformadas Z .

DECONVOLUCION DINAMICA

La deconvolución dinámica es un método iterativo para deconvolucionar la influencia de las primeras K capas de los sismogramas de reflexión, resultando en los sismogramas de reflexión para $k+1$ capas. La referencia de los coeficientes de reflexión es simple, el primer coeficiente del filtro convolutivo se calcula a través de la recursión de Robinson (1967). La iteración es como sigue:

Inicio

$$r(0) = x(1), v^2(0) = 1 - r^2(0) \quad (1a)$$

$$p(0, Z) = 1 \text{ y } Q(0, Z) = 0$$

Desde k hasta $k+1$

$$r(k+1) = \frac{1}{v^2(k)} \sum_{j=0}^{k-1} P(k, j) x(k+1-j) \quad (1b)$$

$$v^2(k+1) = (1 - r^2(k+1)) v^2(k) \quad (1c)$$

$$P(k+1, Z) = P(k, Z) - r(k+1) Z Q^R(k, Z)$$

$$Q(k+1, Z) = Q(k, Z) - r(k+1) Z P^R(k, Z) \quad (1d)$$

donde $P(k, Z)$ y $Q(k, Z)$ son polinomios en Z con coeficientes $p(k, j)$ y $q(k, j)$, $j=0, \dots, k$ y $P^R(k, Z) = Z^k P(k, Z^{-1})$ y $Q^R(k, Z) = Z^k Q(k, Z^{-1})$

La habilidad de este algoritmo para calcular los coeficientes de reflexión para sismogramas se muestra en la Figura 1. Los coeficientes de reflexión (Figura 1a) se calculan del modelo tomado de Ferber (1985) para producir el sismograma (Figura 1b). El uso de la deconvolución dinámica (Figura 1c) permite reproducir los coeficientes de reflexión con exactitud. La influencia del ruido se muestra en las Figuras 2a y 2b, donde se agrega ruido blanco al sismograma, que es el factor principal para la inestabilidad en la deconvolución dinámica.

DECONVOLUCION DINAMICA ESTABILIZADA

La idea principal en el algoritmo de estabilización es la estimación de la varianza para los coeficientes de reflexión (Ferber, 1985). Si se usa como estimación de la varianza el cuadrado de los coeficientes de reflexión reales entonces esta variación se considera la varianza real. Igualmente si a $r(j)$ se le remueve la varianza para $r(j)$, es decir, $E[\hat{r}(j)] = r(j)$ donde E denota esperanza matemática, $\hat{r}(j)$ se suma la varianza por $r^2(j)$, porque $E[\hat{r}(j)] = r^2(j) + V[r(j)]$, donde V denota el operador varianza.

Junto con la estimación de la varianza de los coeficientes de reflexión estimados, es posible decidir si los coeficientes de reflexión son significativamente diferentes del ruido o no, seleccionándolos para hacerlos cero. Para esta prueba los coeficientes de reflexión se comparan con la escala estándar de desviación de la varianza estimada. El factor de escala c usualmente varía entre 2 y 4. La interacción estabilizada es:

Inicio

Estimar ρ^2 para la variación de ruido y $c > 0$

$$r(0) = x(1), v(0) = 1 - r^2(0) + \rho^2 \quad (2a)$$

Prueba

$$|r(0)| < c\rho \Rightarrow r(0) = 0 \text{ y } v^2(0) = 1 \quad (2b)$$

$$P(0,Z) = 1 \text{ y } Q(0,Z) = 0 \quad (2c)$$

Desde k hasta $k+1$

$$r(k+1) = \frac{1}{v^2(k)} \sum_{j=0}^{k-1} P(k,j) x(k+1-j) \quad (2d)$$

$$e^2(k+1) = \frac{\sigma^2}{v^2(k)} \sum_{j=0}^{k-1} P^2(k,j) \quad (2e)$$

$$v^2(k+1) = [1 - r^2(k+1) + e^2(k+1)]v^2(k) \quad (2f)$$

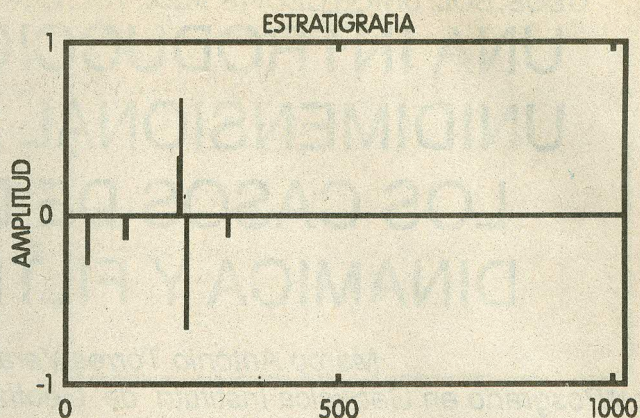


Figura 1a.

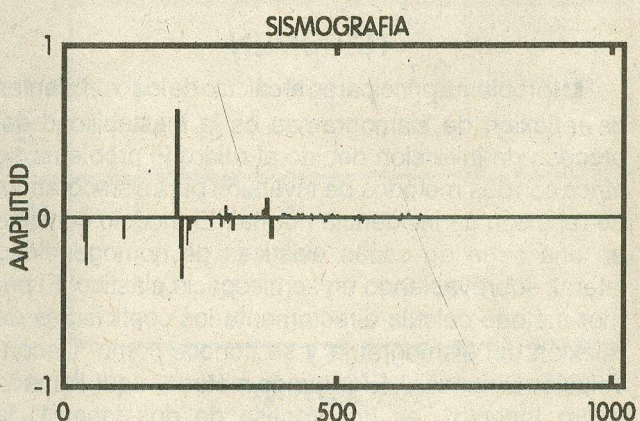


figura 1b.

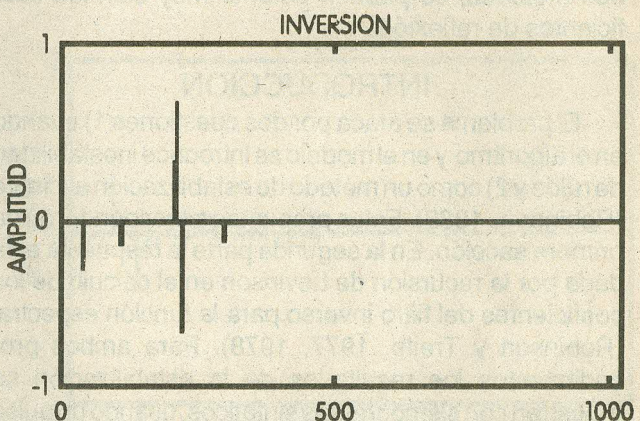


Figura 1c.

Prueba

$$|r(k+1)| < c2(k+1) \Rightarrow r(k+1) = 0 \text{ y } v^2(k+1) = v^2(k) \quad (2g)$$

$$P(k+1, Z) = P(k, Z) - r(k+1)ZQ^R(k, Z),$$

$$Q(k+1, Z) = Q(k, Z) - r(k+1)ZP^R(k, Z) \quad (2h)$$

La estabilización con la deconvolución dinámica del sismograma ruidoso (Figura 2a) reproduce la secuencia de los coeficientes de reflexión con exactitud. La Figura 3a y 3b muestran la estabilización.

FILTRADO INVERSO

Un pulso unitario se utiliza como onda plana descendente de la fuente localizada justo sobre la parte superior de la primera capa. Su función espectral está dada por (Robinson y Treitel, 1977)

$$\phi(Z) = 1 - r(0)[x(Z) + z(Z)^{-1}] + [r^2(0) - 1]x(Z)x(Z^{-1}) \quad (3)$$

donde $x(Z)$ es la transformada Z de la onda ascendente en el estrato que contiene a la fuente. En el siguiente caso espectral donde $r(0) = 0$ queda como

$$\phi(Z) = 1 - x(Z)x(Z^{-1}) \quad (4)$$

El sismograma de reflexión es igual a la respuesta al impulso del filtro de fase cero.

$$X(Z) = \frac{B(n, Z)}{A(n, Z)}, \quad a(n, 0) = 1 \quad (5)$$

con

$$A(n, z)A(n, Z^{-1}) - B(n, Z)B(n, Z^{-1}) = V \quad (6)$$

y $A(n, Z)$ tiene la propiedad de fase mínima. Los coeficientes de los polinomios $A(n, Z)$ y $B(n, Z)$ son $a(n, j)$ y $b(n, j)$, $j=0, \dots, n$. Esto nos lleva a

$$\phi(Z) = \frac{V}{A(n, Z)A(n, Z^{-1})} \quad (7)$$

donde $a(n, 1), \dots, a(n, n)$ y V pueden calcularse por la solución de las ecuaciones normales (Robinson Treitel, 1977)

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \dots & \phi_{n-1} \\ \phi_n & \phi_{n-1} & \dots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n0} \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La ecuación anterior se resuelve con la recursión de Levinson.

La recursión es:

Inicio

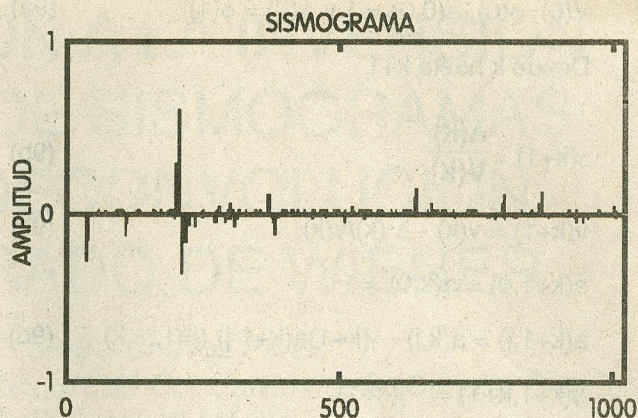


Figura 2a.

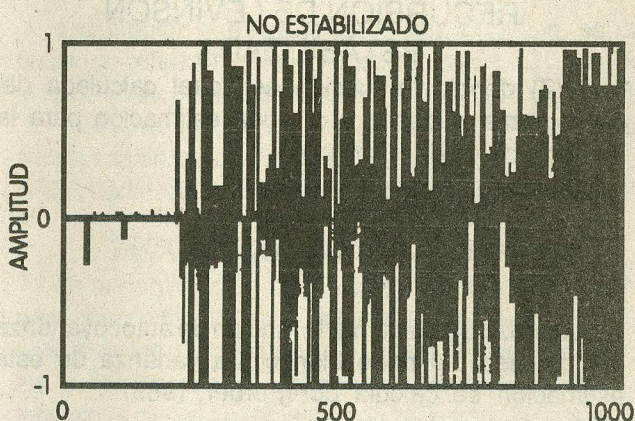


Figura 2b.

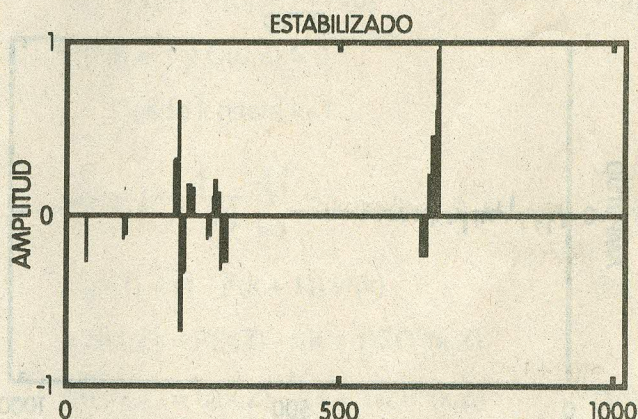


Figura 2c.

$$V(0)=\phi(0), a(0,0) = 1 \text{ y } \Delta(0) = \phi(1) \quad (9a)$$

Desde k hasta k+1

$$\gamma(k+1) = \frac{\Delta(k)}{V(k)}, \quad (9b)$$

$$v(k+1) = v(k) - \Delta^2(k)/v(k), \quad (9c)$$

$$a(k+1,0) = a(k,0) = 1$$

$$a(k+1,j) = a(k,j) - \gamma(k+1)a(k+1-j), (j=1,\dots,k) \quad (9d)$$

$$a(k+1,k+1) = -\gamma(k+1).$$

$$\Delta(k+1) = \sum_{j=0}^{k+1} a(k+1,j)_{-(k+2-j)} \quad (9e)$$

donde $a(n,1), \dots, a(n,n)$ y $v(n)$ son la solución final.

RECUSION DE LEVINSON ESTABILIZADA

$\Phi(Z)$ denota la función espectral calculada del sismograma ruidoso y σ^2 una estimación para la varianza del ruido. Entonces

$$\Psi(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-j} w(k)w(k+j)$$

se utiliza para estimar la función de autocovarianza del proceso del ruido blanco. La varianza de esta estimación se calcula por (Ferber, 1985)

$$V[\Psi(j)] \sigma^2 / m.$$

El problema para encontrar $a(n,1), \dots, a(n,n)$, y $v(n)$, que remueve la varianza (8), se resuelve con la recursión de Levinson estabilizada.

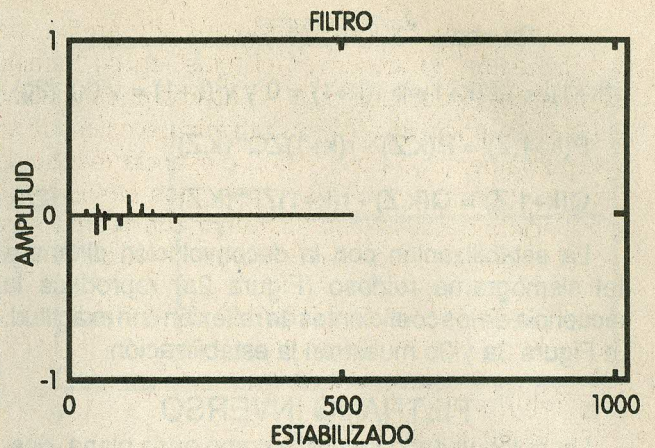


Figura 3b.

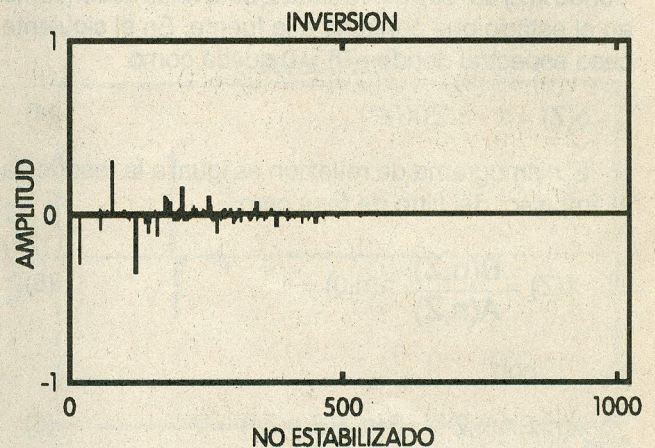


Figura 3c.

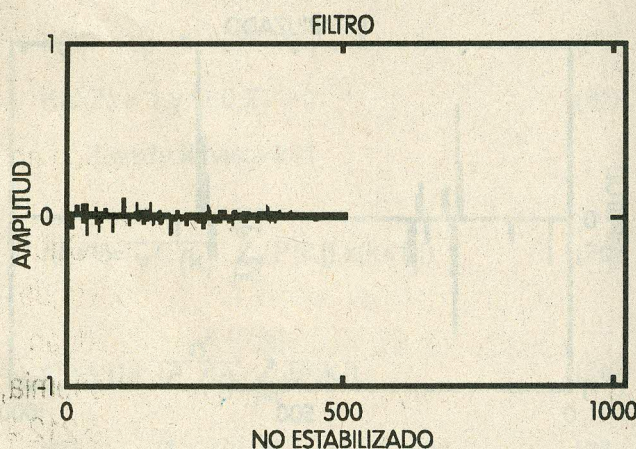


Figura 3a.

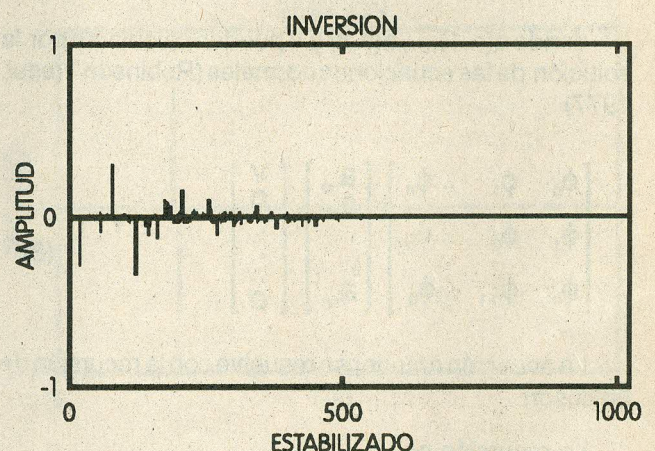


Figura 3d.

Como con la deconvolución dinámica, la estabilización no remueve el "bias" en su término cuadrático. Es decir, el "bias" se usa como estimación de la discrepancia cuadrática. La varianza estimada se usa nuevamente para probar la discrepancia, resultando en una prueba para los coeficientes parciales de correlación, la cual se marca con cero, si la discrepancia no es significativamente diferente del ruido.

Empezar con la función espectral valuada en cero es correcto. La expresión matemática está dada por

$$E[\phi(0)] = \phi(0) - \sigma^2 \quad (10)$$

y resulta en la estimación

$$E[\phi(0) + \sigma^2] = \phi(0) \quad (11)$$

que da una nueva justificación estadística de la conocida estabilización por preblanqueo (Ferber, 1985)

La estabilización es:

Inicio

$$v(0) = \phi(0) + \sigma^2, a(0,0)=1, \Delta(0)=\phi(1) \quad (12a)$$

$$s=\sigma^2/m \text{ y } d=s$$

Prueba

$$|\Delta(0)| < cd \Rightarrow \Delta(0) = 0 \quad (12b)$$

Para k hasta k+1

$$\gamma(k+1) = 0$$

$$v(k+1) = v(k),$$

$$a(k+1,j) = a(k,j) \quad (j=0,\dots,k),$$

$$a(k+1,k+1) = 0 \quad (12c)$$

Si $\Delta(k) = 0$ ir a (12g),

$$\gamma(k+1) = \frac{\Delta(k)}{V(k)}, \quad (12d)$$

$$v(k+1) = v(k) - (\Delta^2(k) - d)/v(k), \quad (12e)$$

$$a(k+1,j) = a(k,j) - \gamma(k+1)a(k+1-j), (j=1,\dots,k)$$

$$a(k+1,k+1) = -\gamma(k+1), \quad (12f)$$

$$\Delta(k+1) = \sum_{j=0}^{k+1} a(k+1,j)\phi(k+2-j), \quad (12g)$$

$$d=s[\sum_{j=0}^{k-1} a^2(k+1,j)], \quad (12h)$$

Prueba

$$[\Delta(k+1)] < cd \Rightarrow \Delta(k+1) = 0 \quad (12i)$$

Estos procesos se demuestran con el sismograma ruidoso de la figura 3 obtenido mediante recursión de Levinson estabilizada, y resulta una buena estimación de los coeficientes del filtro inverso como en el caso no estabilizado (con la aproximación relativa de la secuencia de los coeficientes de reflexión).

CONCLUSIONES

La estabilización de la inversión de un sismograma debido a la remoción de la varianza, inducida por el ruido en los términos no lineales del algoritmo de inversión, se muestra con el uso de la varianza estimada. El cálculo adicional consiste en el cómputo de un producto escalar por pasos iterativos. Para sismogramas de reflexión impulsivos, la deconvolución dinámica es superior al filtro inverso porque es más precisa y requiere menos cálculos. Por otra parte el filtro inverso con sismogramas reales es superior porque es una transformación lineal del sismograma que permite el cálculo de la forma de la ondícula y del ruido. Aunque esto no se demuestra en este trabajo, es posible afirmarlo porque este tipo de filtrado permite tratar problemas de banda frecuencial limitada.

REFERENCIAS

Ferber, R.G., 1985 Stabilización of Normal-Incidence Seismogram Inversion Removing The Noise-Induced Bias, Geophys. Prosp. 33, 212-223

Robinson E.A., 1967, Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs, Holden Day, San Francisco.

Robinson E.A., y Treitel S., 1977, The Spectra Function of a Layered System and the Determination of Waveforms at Depth. Geophys. Prosp. 25, 434-459.

Robinson E.A., y Treitel S., 1978, The Fine Structure of the Normal Incidence Synthetic Seismogram, Geophys. J.R. astr. Soc. 53, 289-309.

Robinson E.A., 1982, Spectra Approach to Geophysical Inversion by Loretz, Fourier and Random Transforms, Proc. IEEE 70, 1039-1054.

AVISO

Curso "La Matemática y la Computación en las Geociencias"

Sede: Capitolio Nacional, La Habana Cuba.

Duración: del 13 de julio al 8 de agosto de

1992 costo: \$ 250.00 US Organiza: Juan

Perez H. Instituto de Geofísica y Astronomía,

Academia de Ciencias de Cuba. Calle 212 #

2906, La Lisa. C.P. 13500, La Habana Cuba.

Telex 511240 geoascu Fax (537) 645604.