

MODELADO DE IRREGULARIDADES TOPOGRAFICAS ANTE INCIDENCIA DE ONDAS P, SV Y DE RAYLEIGH

Juan Martín Gómez-González* y Miguel A. Bravo**

*Centro de Investigación Sísmica, AC, Carretera al Ajusco 203
Col Héroes de Padierna, México, D.F. 14200

**IBM de México, S.A., Sector Educación, Rubén Darío No. 55,
Col. Polanco Chapultepec, México, D.F. 11560

RESUMEN

Se presenta un método de frontera para resolver el problema de difracción de ondas P, SV y de Rayleigh por irregularidades topográficas en un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo. El método representa los campos difractados de onda mediante combinaciones lineales de soluciones que forman familias completas de la ecuación reducida de Navier. Los coeficientes indeterminados de las combinaciones lineales se encuentran al ajustar las condiciones de frontera en el sentido de mínimos cuadrados. Se obtienen resultados en la frecuencia para un valle aluvial y varias geometrías topográficas ante diversas incidencias. Se analiza la sensibilidad de las amplitudes con respecto a variaciones de la geometría y la frecuencia. Se verifica que las mayores amplificaciones del movimiento del terreno ocurren en el centro de las irregularidades. Asimismo, se demuestra la factibilidad de emplear el método en un ambiente de cómputo personal.

INTRODUCCION

Los datos instrumentales verifican la importancia de la topografía en la amplificación dinámica del movimiento del terreno. La base de los promontorios es una de las causas principales de importantes efectos laterales (Grafiths y Bollinger, 1979; Sánchez-Sesma, 1987), lo que indica que para estudiarlos adecuadamente el fenómeno debe tratarse espacialmente. Debido a esto, un modelo unidimensional simple no permite inferir en forma adecuada las amplificaciones reales del movimiento del terreno.

En este trabajo se extiende el método de frontera desarrollado por Sánchez-Sesma et al. (1982a). Ellos utilizaron el método para estudiar los efectos provocados por cañones y obtuvieron buenas representaciones en el dominio de la frecuencia. Ahora, se parte del él, μ se aplica a promontorios para medir las bondades del método en los dominios de la frecuencia y del tiempo. Los coeficientes indeterminados que aparecen en las combinaciones lineales se obtienen al minimizar el error cuadrático medio mediante la solución de las condiciones de frontera en la interfaz del semiespacio y la irregularidad, así como en un intervalo finito de la superficie del semiespacio.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Considérese una inclusión elástica en la superficie de un semiespacio como se muestra en la Figura 1. En ella se incluyen esquemáticamente algunos campos incidentes de ondas P, SV y de Rayleigh. La inclusión se denomina región R y el semiespacio región E. El problema se trata como de difracción de ondas elásticas y se pretende encontrar los campos de desplazamientos en la inclusión y en el semiespacio provocados por las onda incidentes. El problema es de tipo vectorial debido a la existencia de desplazamientos horizontales y verticales y se supone que las ondas son periódicas con dependencia armónica del tiempo dada por $\exp(i\omega t)$.

Los vectores de desplazamiento u_i^E y u_i^R satisfacen la ecuación reducida de Navier, misma que en notación índice puede prepresentarse por

$$\mu_{\xi} u_{i,jj}^{\xi} + (\lambda_{\xi} + \mu_{\xi}) u_{i,jj}^{\xi} + \rho_{\xi} \omega^2 u_i^{\xi} = 0, \quad i,j = x,z \quad (1)$$

donde $\xi = E$ o R para el semiespacio o la inclusión, repectivamente.

Si se define U_i^0 como la solución de campo libre, es decir, la solución en ausencia de la irregularidad ante el campo de ondas incidente, entonces, ocurre que para la región exterior E el campo de desplazamiento U_i^E se puede definir como

$$U_i^E = U_i^0 + V_i^E, \quad i = x,z \quad (2)$$

donde V_i^E es vector de desplazamientos generado por las ondas difractadas en la irregularidad. Por su parte, para la región interior R la solución de campo se puede expresar como

$$U_i^R = V_i^R \quad (3)$$

donde V_i^R es el vector de desplazamientos generado por las ondas refractadas por la inclusión. Por otra parte, las condiciones de frontera que deben cumplirse son tracciones nulas en la superficie libre

$$t(v^s) = \sigma_{ij}(v^s) n_j = 0 \text{ en } \partial_1 \xi, \quad i, j = x, z. \quad (4)$$

Además, se deben de cumplir condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones en $\partial E_2 = \partial R_2$

$$(V)_i = V_i^E - V_i^R = U_i^{(n)} \quad i = x, z \quad (5)$$

$$(t(\bar{v}))_i = t_i(\bar{v}^E) - t_i(\bar{v}^R) = -t_i(u^{(n)}) \quad i = x, z \quad (6)$$

En las expresiones (4) y (6) se define a $t_i(\bar{v})$ como el vector de tracción asociado con la frontera de vector normal n_i para el desplazamiento v_i , donde n_i se considera dirigida hacia fuera de R. El tensor de esfuerzo asociado al vector V_i está dado por $\sigma_{ij}(\bar{v})$.

USO DE FAMILIAS COMPLETAS

Herrera y Sabina (1987) proponen la factibilidad de usar las siguientes familias de funciones dadas en las coordenadas polares, las cuales son bases completas de la ecuación reducida de onda en dos dimensiones, con número de onda $k = \omega/c$,

$$C_R = \left[J_0(kr), J_n(kr)\sin(n\theta), J_n(kr)\cos(n\theta), \right. \\ \left. n = 1, 2, \dots \right] \quad (7)$$

$$C_E = \left[H_0^{(2)}(kr), H_n^{(2)}(kr)\sin(n\theta), H_n^{(2)}(kr)\cos(n\theta), \right. \\ \left. n = 1, 2, \dots \right] \quad (8)$$

donde $J_n(0)$ = función de Bessel de primera especie y orden n , $H_n^{(2)}(0)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n , y r y θ son coordenadas polares. La familia C_R es completa en regiones acotadas y C_E lo es para regiones no acotadas (Herrera y Sabina, 1978). Sánchez-Sesma et al. (1982b) han usado la completez de estas familias para el caso escalar de ondas SH.

De los potenciales de cada tipo de onda en ambas regiones se obtienen ocho familias de vectores de desplazamientos, cuatro para R y cuatro para E. Tales vectores cumplen en la región E con las condiciones de sommerfeld (1984), donde la energía irradiada por las fuentes debe dispersarse al infinito sin que pueda irradiarse energía desde el infinito hasta las singularidades del campo de desplazamientos.

SOLUCION NUMERICA

Considérense las aproximaciones para V_i^E y V_i^R dada por

$$V_i^E = \sum_{m=1}^{4N+2} A_m W_{1m}^E, \quad (9)$$

$$V_i^R = \sum_{m=1}^{4N+2} B_m W_{1m}^R, \quad (10)$$

donde W_{1m}^E y W_{1m}^R son los vectores de desplazamiento para las regiones E y R, respectivamente, y si el orden de los desarrollos para los potenciales es N , el límite superior para m es $4N + 2$. Las familias completas C_R y C_E se utilizan para generar el conjunto de vectores V_i^E y V_i^R que permiten resolver el problema.

Los coeficientes de las ecuaciones (9) y (10) se determinan de tal manera que el error cuadrático medio para satisfacer las condiciones de frontera sea mínimo. Para ello se utiliza el método de mínimos cuadrados para formar el sistema de ecuaciones generados por los puntos de colocación al imponer condiciones de frontera en $\partial_1 R$, $\partial_2 E$ y $\partial_1 E$, tomando K , L y $2M$ puntos, respectivamente. La solución del sistema de ecuaciones se obtiene mediante descomposición LU (Stewart, 1973).

El número de incógnitas es $8N + 4$, se forman $2L + 2K + 4M$ ecuaciones, buscando obtener un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales. El sistema de ecuaciones a resolver surge de las ecuaciones normales.

RESULTADOS

Para examinar los alcances del método se obtienen resultados numéricos para geometrías de dos irregularidades topográficas: valles aluviales y promontorios. Los resultados en el dominio de la frecuencia están dados en términos de la frecuencia adimensional

$$\eta = \frac{\omega a}{\pi \beta_E} = \frac{2a}{\lambda_s},$$

donde ω = frecuencia circular, a = semiancho de la irregularidad, β_E es la velocidad de ondas S en el semiespacio y λ_s es la longitud de onda. Se analiza la incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh. Tanto las ondas incidentes como las ondas difractadas dependen del parámetro η .

La figura 2 muestra las funciones de transferencia de 12 estaciones, colocadas simétricamente sobre el valle y la superficie plana, para incidencia normal de ondas SV. Se usó una relación de Poisson $\nu = 1/3$, una relación de densidades $\rho_R/\rho_E = 2/3$ y una relación de velocidades $\beta_R/\beta_E = 1/2$. Se utilizaron 90 puntos de colocación y 100 de evaluación. Se requirieron dos intervalos de frecuencia. En el primero (de 0-2) se utilizaron 12 desarrollos de funciones dentro del valle y 6 fuera de él. En el segundo (de 2-4) se utilizaron 14 y 8 desarrollos, respectivamente. Se presentan en la misma gráfica los componentes horizontal y vertical del movimiento. Se observa que las funciones de transferencia son iguales por simetría en las estaciones opuestas con respecto al centro. Las amplitudes son mayores al entrar al valle y aumentan en las estaciones más cercanas al centro. Las mayores amplitudes están en el

$$t(v^z) = \sigma_{ij}(v^z) n_j = 0 \text{ en } \partial_1 \xi, \quad i, j = x, z. \quad (4)$$

Además, se deben de cumplir condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones en $\partial E_2 = \partial R_2$

$$(V)_i = V_i^E - V_i^R = U_i^{(0)} \quad i = x, z \quad (5)$$

$$(t(\vec{v}))_i = t_i(\vec{v}^E) - t_i(\vec{v}^R) = -t_i(u^{(r)}) \quad i = x, z \quad (6)$$

En las expresiones (4) y (6) se define a $t_i(\vec{v})$ como el vector de tracción asociado con la frontera de vector normal n_i para el desplazamiento v_i , donde n_i se considera dirigida hacia fuera de R. El tensor de esfuerzo asociado al vector V_i está dado por $\sigma_{ij}(\vec{v})$.

USO DE FAMILIAS COMPLETAS

Herrera y Sabina (1987) proponen la factibilidad de usar las siguientes familias de funciones dadas en las coordenadas polares, las cuales son bases completas de la ecuación reducida de onda en dos dimensiones, con número de onda $k = \omega/c$,

$$C_R = \left[\begin{array}{l} J_n(kr), \quad J_n(kr)\sin(n\theta), \quad J_n(kr)\cos(n\theta), \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right] \quad (7)$$

$$C_E = \left[\begin{array}{l} H_n^{(2)}(kr), \quad H_n^{(2)}(kr)\sin(n\theta), \quad H_n^{(2)}(kr)\cos(n\theta), \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right] \quad (8)$$

donde $J_n(o)$ = función de Bessel de primera especie y orden n , $H_n^{(2)}(o)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n , y r y θ son coordenadas polares. La familia CR es completa en regiones acotadas y CE lo es para regiones no acotadas (Herrera y Sabina, 1978). Sánchez-Sesma et al. (1982b) han usado la completez de estas familias para el caso escalar de ondas SH.

De los potenciales de cada tipo de onda en ambas regiones se obtienen ocho familias de vectores de desplazamientos, cuatro para R y cuatro para E. Tales vectores cumplen en la región E con las condiciones de sommerfeld (1984), donde la energía irradiada por las fuentes debe dispersarse al infinito sin que pueda irradiarse energía desde el infinito hasta las singularidades del campo de desplazamientos.

SOLUCION NUMERICA

Considérense las aproximaciones para V_i^E y V_i^R dada por

$$V_i^E = \sum_{m=1}^{4N+2} A_m^E W_{im}^E, \quad (9)$$

$$V_i^R = \sum_{m=1}^{4N+2} B_m^R W_{im}^R, \quad (10)$$

donde W_{im}^E y W_{im}^R son los vectores de desplazamiento para las regiones E y R, respectivamente, y si el orden de los desarrollos para los potenciales es N, el límite superior para m es $4N + 2$. Las familias completas CR y CE se utilizan para generar el conjunto de vectores V_i^E y V_i^R que permiten resolver el problema.

Los coeficientes de las ecuaciones (9) y (10) se determinan de tal manera que el error cuadrático medio para satisfacer las condiciones de frontera sea mínimo. Para ello se utiliza el método de mínimos cuadrados para formar el sistema de ecuaciones generados por los puntos de colocación al imponer condiciones de frontera en $\partial_1 R$, $\partial_2 E$ y $\partial_1 E$, tomando K, L y 2M puntos, respectivamente. La solución del sistema de ecuaciones se obtiene mediante descomposición LU (Stewart, 1973).

El número de incógnitas es $8N + 4$, se forman $2L + 2K + 4M$ ecuaciones, buscando obtener un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales. El sistema de ecuaciones a resolver surge de las ecuaciones normales.

RESULTADOS

Para examinar los alcances del método se obtienen resultados numéricos para geometrías de dos irregularidades topográficas: valles aluviales y promontorios. Los resultados en el dominio de la frecuencia están dados en términos de la frecuencia adimensional

$$\eta = \frac{\omega a}{\pi \beta_E} = \frac{2a}{\lambda_s},$$

donde ω = frecuencia circular, a = semiancho de la irregularidad, β_E es la velocidad de ondas S en el semiespacio y λ_s es la longitud de onda. Se analiza la incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh. Tanto las ondas incidentes como las ondas difractadas dependen del parámetro η .

La figura 2 muestra las funciones de transferencia de 12 estaciones, colocadas simétricamente sobre el valle y la superficie plana, para incidencia normal de ondas SV. Se usó una relación de Poisson $\nu = 1/3$, una relación de densidades $\rho_R/\rho_E = 2/3$ y una relación de velocidades $\beta_R/\beta_E = 1/2$. Se utilizaron 90 puntos de colocación y 100 de evaluación. Se requirieron dos intervalos de frecuencia. En el primero (de 0-2) se utilizaron 12 desarrollos de funciones dentro del valle y 6 fuera de él. En el segundo (de 2-4) se utilizaron 14 y 8 desarrollos, respectivamente. Se presentan en la misma gráfica los componentes horizontal y vertical del movimiento. Se observa que las funciones de transferencia son iguales por simetría en las estaciones opuestas con respecto al centro. Las amplitudes son mayores al entrar al valle y aumentan en las estaciones más cercanas al centro. Las mayores amplitudes están en el

componente horizontal, en el que después de $\eta = 1.5$ aparecen varios picos máximos en la frecuencia y la mayor variación de frecuencias ocurre en el centro del valle, mientras que el evento pasa casi desapercibido en el semiespacio.

La Figura 3 muestra sismogramas sintéticos para los desplazamientos horizontales y verticales de ondas SV, calculados para dos promotorios. En ellos se evalúa la solución en 100 estaciones colocadas sobre la superficie con una distancia total de 6 km, ante incidencia ablicua (30°). La frecuencia adimensional máxima para el cosenoide fue de 3.2 con dos intervalos de frecuencia, 0-2 y 2-3, con 12 desarrollos dentro de la inclusión y 5 fuera de ella, para el primer intervalo, y 16 y 8 desarrollos, respectivamente, para el segundo. Para la topografía cúbica la máxima frecuencia fue de 4, con tres intervalos, de 0-2, 2-3 y 3-4 con 14 y 6, 18 y 8, y 24 y 14 desarrollos dentro y fuera de la región, respectivamente. Nótese como las amplitudes son muy grandes. Estas amplitudes en la parte exterior de los promontorios son muy pequeñas, posiblemente por la forma en que se representa el campo difractado. Todas las trazas fueron normalizadas con respecto a la mayor amplitud de ambos componentes.

Estos cálculos muestran que la variabilidad de las amplitudes depende del tipo de geometría, de la frecuencia y del orden de los desarrollos. Como la selección de los desarrollos para el cálculo de los desplazamientos se realiza mediante ensayo y error, no se puede asegurar que los intervalos de frecuencia

seleccionados sean óptimos.

DISCUSION

En general, las amplitudes de los desplazamientos en la frecuencia están bien representadas y las tracciones residuales son muy pequeñas. Se observa de la representación en el tiempo que las amplitudes están subestimadas en el interior de la irregularidad y subestimadas en el exterior.

Los cálculos requirieron 4 MegaBytes de memoria principal (RAM) para alcanzar un valor de $\eta = 3.5$ y se realizaron con éxito en una computadora personal 80386. El problema de tener una representación continua del campo de desplazamientos en frecuencias muy bajas (convergencia) y las oscilaciones en frecuencias altas (estabilidad), además de los altos aleatorio de las amplitudes, hacen que el método no se represente muy bien en el dominio del tiempo.

El método no requiere de un número excesivo de puntos de discretización de la topografía, aunque resulta sensible a la geometría cuando se utilizan frecuencias altas. Con él se corrobora la importancia de las ampliaciones en el centro del promotorio con respecto a la base, las cuales, en algunos ejemplos, alcanzan amplitudes relativas de hasta 12. El orden de los desarrollos juega un papel determinante, ya que cada modelo requiere de un conjunto de desarrollos específicos para distintos intervalos de análisis. La selección del conjunto adecuado se determina mediante ensayo y error.

REFERENCIAS

- Griffiths D.W. y G. A. Bollinger (1979). The effect of Appalachian Mountain topography on seismic waves, Bull. Seism. Soc. Am. 69, 1081-1105
- Herrera I. y F. J. Sabina (1978). Connectivity as an alternative to boundary integral equations. Construction of bases, Proc. Nat'l Acad. Sci. USA 75, 2059-2063
- Sánchez-Sesma F. J. (1987). Site effects on strong motion, soil Dyn. Earthquake Eng 6, 124-132
- Sánchez-Sesma F. J., I. Herrera y M A. Bravo (1982a). Difracción de ondas P, SV y de Rayleigh en un semiespacio elástico, Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, DF.
- Sánchez-Sesma F. J., I. Herrera y J. Avilés (1982b). A Boundary method for elastic wave diffraction: application to scattering of SH waves by surface irregularities, Bull. Seism. Soc. Am. 72, 473-490
- Sommerfeld A., (1949). Partial differential equations in physics, Academic Press, Nueva York.
- Stewart G.W. (1973). Introduction to Matrix Computations, Academic Press, Orlando.

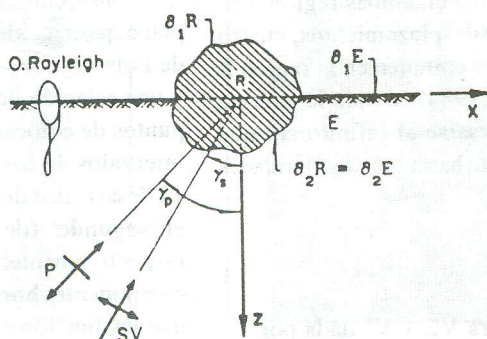


Figura 1. Definición de las fronteras entre el semiespacio y la inclusión elástica bajo incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh.

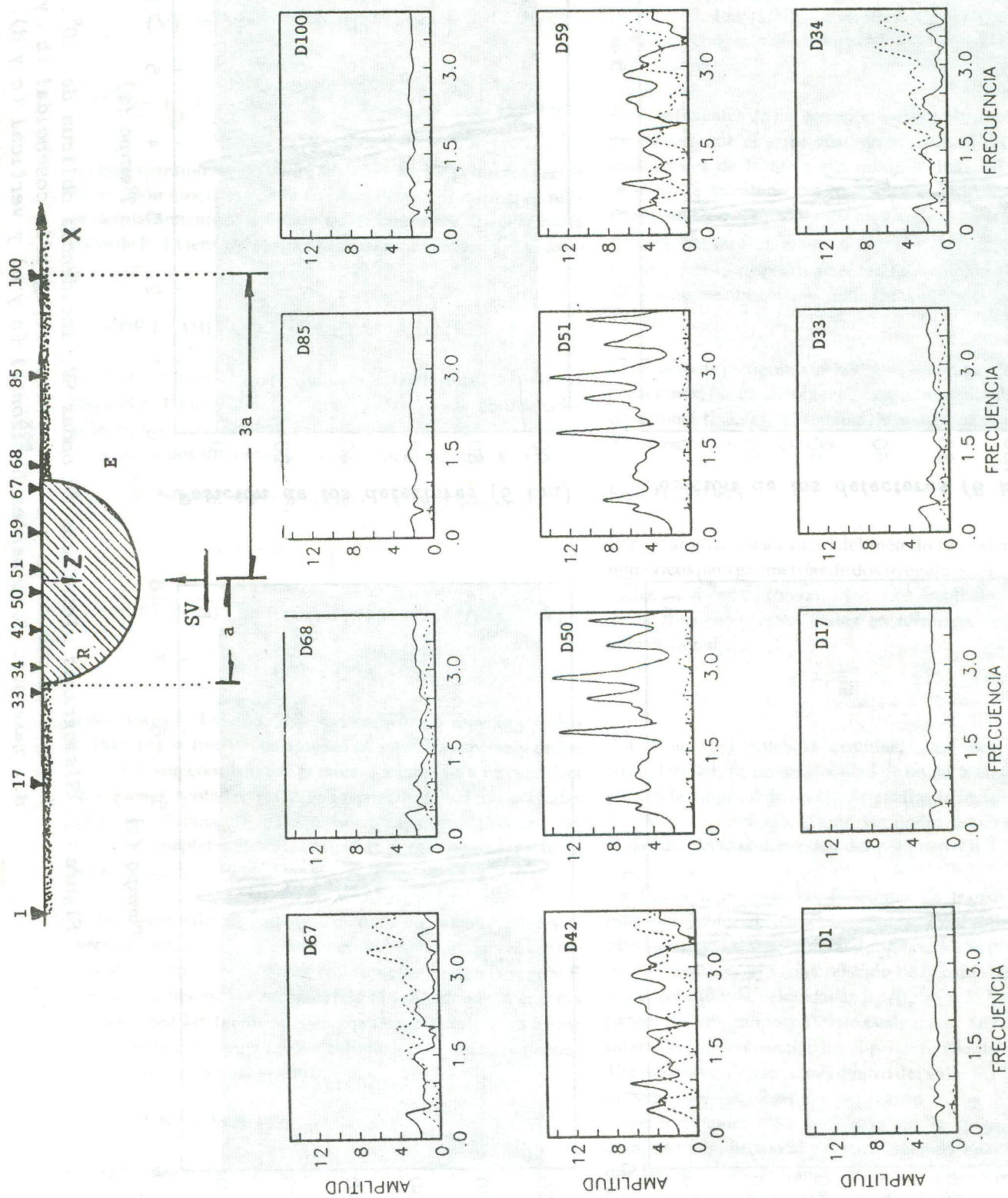


Figura 2. Funciones de transferencia para incidencia normal de ondas SV en un valle aluvial. Estaciones colocadas simétricamente, respecto al centro, sobre la superficie.

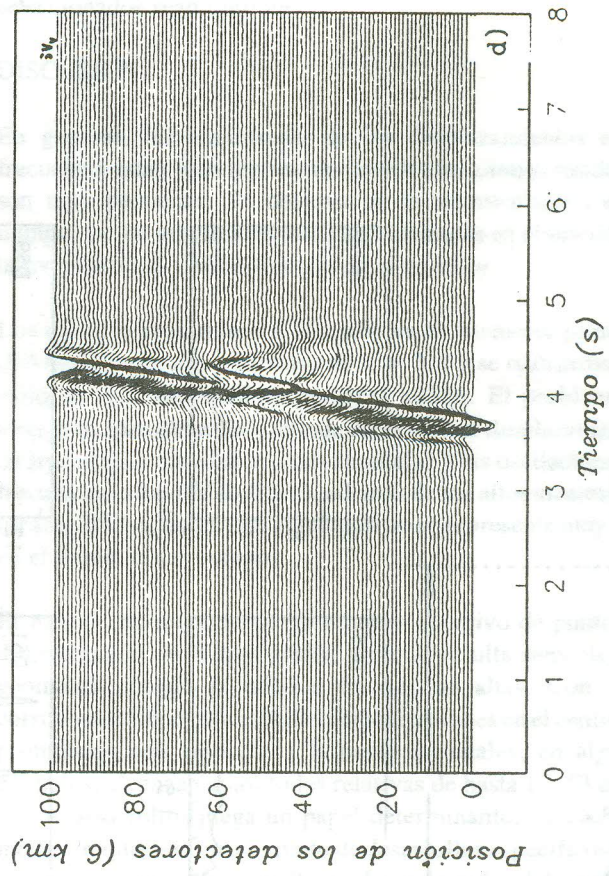
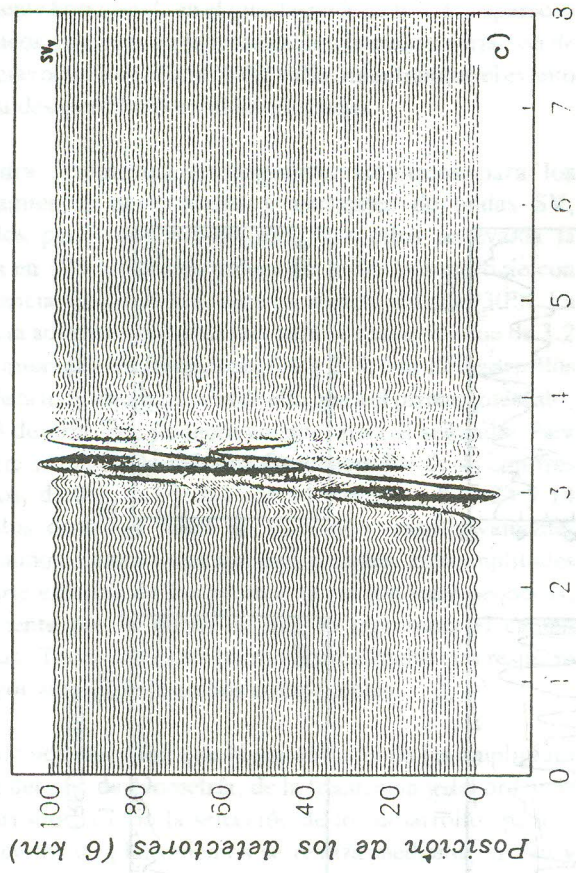
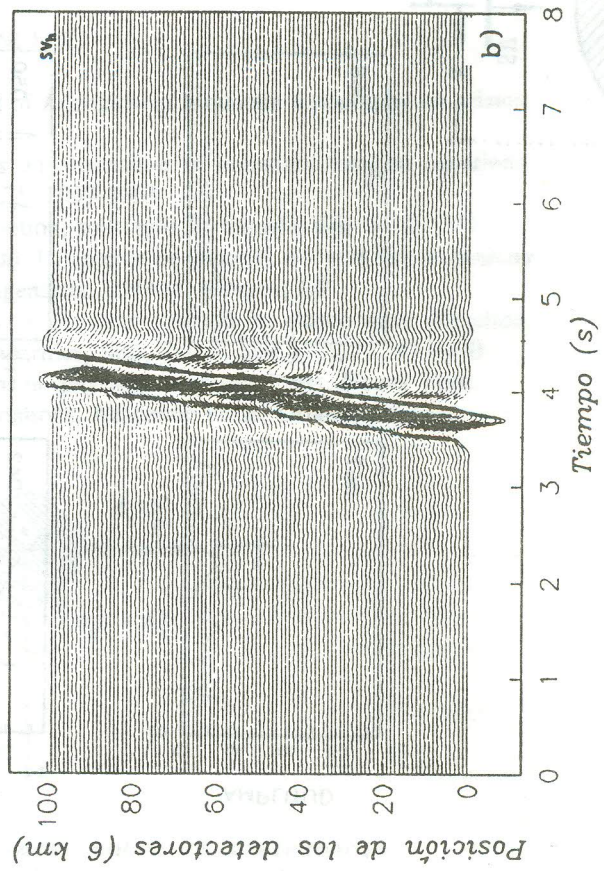
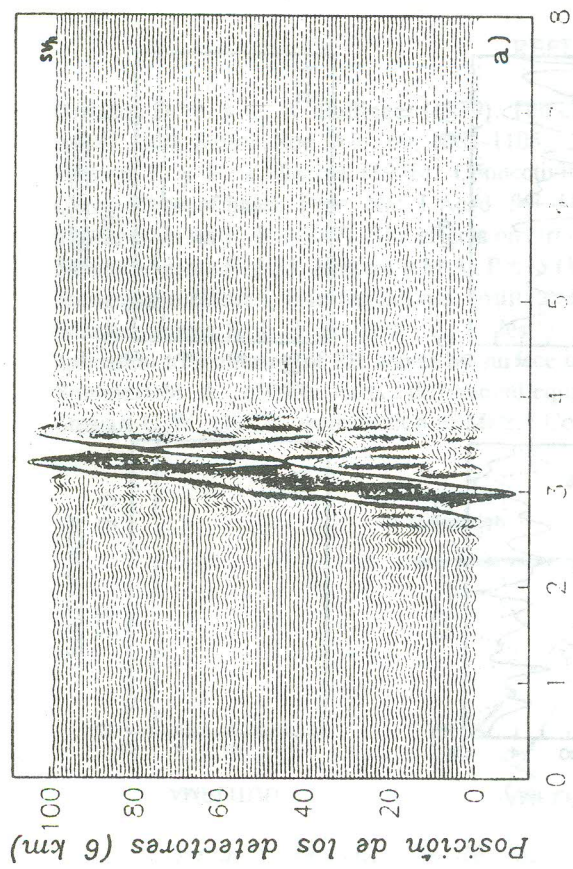


Figura 3. Sismogramas sintéticos de ondas SV, incidencia oblicua de 30° . Topografía cúbica (a y c), $\eta_{\text{máx}}=4.0$. Topografía cosenoidal (b y d), $\eta_{\text{máx}}=3.2$. Componentes horizontal (a y b) y vertical (c y d).