

## DIFERENCIAS FINITAS INTEGRALES : UN "NUEVO" METODO EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE EN MEDIOS CONTINUOS

**Mario César Suárez Arriaga**  
Gerencia de Proyectos Geotermoelectricos  
Comisión Federal de Electricidad  
A.P. 31-C, 58290 Morelia, Mich.  
tel. (451) 4 3970, fax. (451) 44735

**Eli de la Torre Vega**  
Instituto de Investigaciones Eléctricas  
Depto. Análisis de Redes; Ed. 26, 3er piso  
Int. Internado Palmira s/n; Cuernavaca Mor.  
tel. (73) 18 3811/2214; fax. (73) 14 1119

### RESUMEN

Los métodos numéricos tradicionales usados en la resolución de problemas de transporte - diferencias finitas y elementos finitos - tienen ambas ventajas y desventajas bien conocidas. Este trabajo, introduce una poderosa técnica numérica poco difundida, empleada con éxito en problemas de hidrología subterránea y en simulación de sistemas hidrotermales. La técnica de las **Diferencias Finitas Integrales** discretiza, con integrales de volumen, el dominio espacial uni, bi o tridimensional dentro del cual tiene lugar el proceso a modelar; por transformaciones de las integrales involucradas, se plantea un sistema de ecuaciones algebraicas que involucra unos cuantos parámetros geométricos: volúmenes, áreas interfaciales, distancias internodales. Las coordenadas utilizadas son intrínsecas (absolutas) a la malla construida y por tanto no dependen de ningún sistema de referencia externo. El método auna la potencia del Elemento Finito con la simpleza de la Diferencia Finita; válido tanto en procesos altamente transitorios (dt pequeños) como quasi-estacionarios (dt grandes). El manejo de heterogeneidades y discontinuidades entre elementos vecinos, es sencillo. La técnica es ilustrada con aplicaciones a la transferencia de calor, al flujo en acuíferos, a la dispersión y al transporte simultáneo de agua, gas y calor en yacimientos geotérmicos. Dependiendo del fenómeno simulado, el sistema lineal resultante puede ser muy grande y con huecos, dando lugar a matrices de difícil manejo. Para enfrentar este problema, presentamos el método variacional **DIOMRES(k,m)**, de reciente desarrollo, que favorece en tiempo de ejecución y en memoria requerida, la solución eficaz de grandes sistemas lineales dispersos no simétricos.

### INTRODUCCION

En los fenómenos de transporte ocurre siempre una transferencia neta de masa, de momentum, de energía o una combinación simultánea de estas propiedades, que son función del tiempo y del espacio. Sus características físicas son descritas por una ecuación general de propagación que engloba derivadas parciales, variaciones dentro de volúmenes continuos y flujos a través de superficies.

Para procesos reales, que involucren medios volumétricos y fronteras de formas arbitrarias, los métodos de resolución son esencialmente numéricos. Las primeras técnicas empleadas fueron las diferencias finitas, cuyo origen se remonta a los inicios del cálculo diferencial, y cuyos procedimientos de uso han sido ampliamente documentados desde hace muchos decenios.

Los elementos finitos, de desarrollo mas reciente (Clough, 1960), constituyen otra técnica empleada en resolver las ecuaciones de transporte. Los usos del elemento finito, desde luego, no se limitan aquí. De hecho este método se aplica a una

amplia gama de problemas, brindando una riqueza de aplicaciones inigualable. Se calcula que existen una 8000 publicaciones anuales sobre el elemento finito, en diferentes campos de la ciencia y la ingeniería. No obstante algunas dificultades en su uso, el principal atributo de los EF es su aparente generalidad, aunque se reconoce que ésta cualidad teórica a veces no concuerda con aspectos que en la práctica se resuelven mediante recetas empíricas (Gallagher, 1989).

Las Diferencias Finitas Integrales (DFI), que aquí introducimos, es un método poco conocido y ha sido menos documentado. Según Narasimhan (1976), MacNeal (1953) fue el DFI primer analista que empleó un esbozo de para resolver problemas con valores en la frontera; Tyson-Weber (1964) y Cooley (1971) lo emplearon en problemas de flujo subterráneo; Dusenberre (1961) y Edwards (1972) reportan algunos usos en problemas de transferencia de calor. En 1976, Narasimhan y Witherspoon describen por primera vez el método como una herramienta muy adecuada para estudiar el movimiento de fluidos en medios porosos. En 1978 K. Pruess lo emplea en el análisis de

yacimientos geotérmicos. Pruess (1988) incorpora las DFI para simular numéricamente el comportamiento de sistemas multicomponentes con transferencia de calor conductivo/convectivo, en medios porosos y fracturados. Suárez en 1990 lo adapta a un modelo bidimensional de flujo bicomponente con transporte de energía. El método de las DFI es aplicable a todos los fenómenos de transporte que satisfagan la ecuación general planteada abajo. De empleo muy intuitivo; su uso y puesta en ejecución resultan muy simples, aunando la potencia del elemento finito a la sencillez de la diferencia finita.

Dependiendo del método empleado al discretizar la variación de funciones en el tiempo, las DFI pueden generar un sistema lineal con muchos ceros. Para completar la resolución de problemas por DFI, presentamos el método DIOMRES (k,m), una nueva técnica de solución de sistemas lineales no simétricos, en donde la matriz puede ser muy dispersa. El algoritmo permite rapidez y estabilidad en el cálculo, con ahorro de memoria. La forma resumida de este método se publica por primera vez.

#### ECUACION GENERAL DE TRANSPORTE.

Consideremos la ecuación general :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha \nabla \cdot (G \cdot \nabla w) + \beta \nabla \cdot (w \vec{v}) + q$$

en donde  $w(x,y,z,t)$  es una propiedad física que se propaga en el espacio, definida convenientemente en cierta región  $V$ .  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser o constantes o función de las coordenadas espaciales, pero no dependen del tiempo.  $G$  es un coeficiente que puede depender o no del espacio;  $\vec{v}$  es un campo de velocidades y  $q(x,y,z,t)$  ( $\pm$ ), un término de producción interna a  $V$ . Mas adelante se explicita el significado físico de cada término según los diferentes fenómenos representados por esa ecuación.

#### DISCRETIZACION INTEGRAL DE LA REGION V.

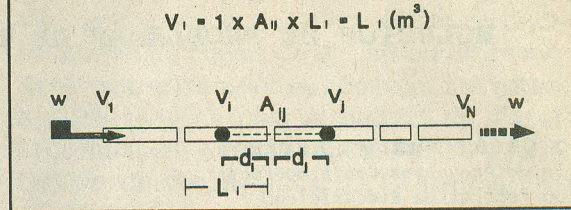
Las figuras 1, 2 y 3 ilustran las diferentes dimensiones de la región en donde puede ocurrir el transporte de  $w$ . El primer paso del método de las DFI consiste en discretizar en elementos mas pequeños, el volumen continuo  $V$  ocupado por la región en donde se define a  $w$  de modo que:

$$V = \bigcup_{i=1}^N V_i ; \text{ con: } V_i \cap V_j = \emptyset$$

$N$  es el número de elementos disjuntos  $V_i$  en que se subdivide a  $V$ .

Figura 1.- Malla Unidimensional

GCFE1X91-METODO DFI.



En el siguiente paso, se integra la ecuación sobre cada  $V_i$ :

$$\int_{V_i} \frac{\partial w}{\partial t} dV_i = \int_{V_i} \text{div}(\vec{F}) dV_i + \int_{V_i} q dV_i ; V_i \subseteq V$$

donde el vector de Flujo es:

$$\vec{F} = \bar{\alpha} (G \cdot \nabla w) + \bar{\beta} (w \vec{v}) ; \bar{\alpha}, \bar{\beta} \text{ promedios en } V_i$$

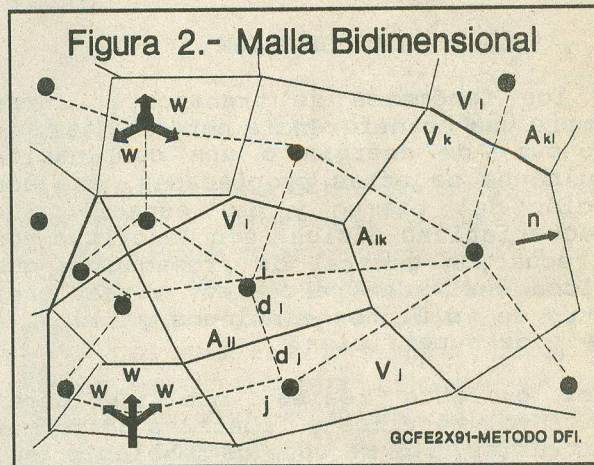
Por el teorema de la divergencia :

$$\int_{V_i} \frac{\partial w}{\partial t} dV_i = \int_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dS_i + \int_{V_i} q dV_i$$

Donde  $S_i$  representa la frontera del elemento volumétrico  $V_i$ .

Figura 2.- Malla Bidimensional

GCFE2X91-METODO DFI.



Cada  $S_i$  tiene  $M_i$  interfaces  $A_{ij}$  que la separan de las demás fronteras:

$$S_i = \bigcup_{j=1}^{M_i} A_{ij} ; \text{ con: } S_i \cap S_j = \emptyset$$

por lo tanto, la integral de superficie se escribe como la suma de integrales sobre las áreas interfaciales:

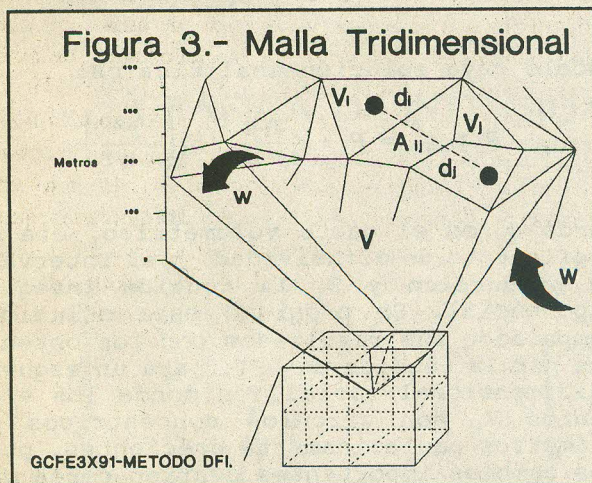
$$\int_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dS_i = \sum_{j=1}^{M_i} \int_{A_{ij}} \vec{F} \cdot \vec{n}_j dA_{ij}$$

La aplicación del teorema del valor medio, implica:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \cdot V_i = \sum_{j=1}^{M_i} \bar{F}_{ij}^n A_{ij} + \bar{q} \cdot V_i$$

Ecuación válida en cada volumen arbitrario  $V_i$ , dentro de los rangos de validez de los teoremas involucrados. Las barras superiores indican valores promedio en cada  $V_i$ .

Las condiciones de aplicabilidad del teorema del valor medio para integrales (Haaser, 1970), exigen que el interior del espacio  $V_i$  (sin la frontera) sea un conjunto conexo. Esta condición lleva implícita un criterio para discretizar al volumen  $V$ : los elementos a emplearse en DFI deben ser figuras simples (rectángulos, cubos, triángulos, trapecios, poliedros, etc.), todos ellos conexos.



#### APROXIMACION ESPACIAL.

El tercer paso en DFI es aproximar la ecuación anterior tanto en el espacio como en el tiempo. El vector flujo  $\vec{F}$  usualmente deriva de un gradiente, por tanto  $\vec{F}_{ij}^n$ , la componente normal de  $\vec{F}$  a través de las interfaces, es una derivada en la dirección perpendicular a cada interface  $A_{ij}$ . Para simplificar el desarrollo, consideraremos sólo el 1<sup>er</sup> miembro de  $\vec{F}$ ; el 2<sup>do</sup> se trata de manera análoga, pues la velocidad también deriva usualmente de un gradiente, como por ejemplo, en la ecuación de Darcy. El flujo normal deviene:

$$\bar{F}_{ij}^n = \bar{\alpha}_i G_i \frac{dw_i}{dn_j} \approx \bar{\alpha}_i G_{ij} \frac{w_j - w_i}{d_i + d_j}$$

Donde  $G_{ij}$  es un valor promedio apropiado de  $G$  entre  $V_i$  y  $V_j$ ; si se exige continuidad en el flujo al pasar de uno a otro volumen:  $1/G_{ij} = (d_i/G_i + d_j/G_j) / (d_i + d_j)$ . La ecuación en el espacio es aproximadamente:

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \Omega_{ij} (w_j - w_i) + q_i$$

$$\text{con: } \Omega_{ij} = \frac{\bar{\alpha}_i G_{ij} A_{ij}}{V_i (d_i + d_j)}$$

Este coeficiente local, representa una "difusividad" generalizada de  $w$  al irse propagando en cada  $V_i$ .

#### DISCRETIZACION EN EL TIEMPO.

Sea  $\delta k_t = t^{k+1} - t^k$  el vector de intervalos de tiempos considerados. Un algoritmo general estable para esta discretización:

$$w_i^{k+1} - w_i^k = \sum_{j=1}^{M_i} \Omega_{ij} [\theta (w_j^{k+1} - w_i^{k+1}) +$$

$$(1 - \theta) (w_j^k - w_i^k)] \delta k_t + q_i^k; \quad \forall i=1,$$

con:  $0 \leq \theta \leq 1$ ; si se escoge  $\theta = 0$ , el algoritmo es totalmente explícito y la fórmula anterior es un conjunto simple de ecuaciones algebraicas, válido si los cambios en  $V$  son lentos. Si  $\theta = \frac{1}{2}$ , se tiene un esquema de Crank-Nicholson para cambios mas rápidos. En general para  $\theta > \frac{1}{2}$ , el algoritmo es incondicionalmente estable, pudiendo emplearse  $\delta k_t$  grandes o pequeños. Sin embargo, estas magnitudes son relativas al tipo de problema considerado y serán afectadas por el valor tanto de  $G_{ij}$  como de  $q_i(t^k)$ . Dependiendo del modo de aproximación en el tiempo que se use, para  $\theta > 0$  surgirá siempre un sistema lineal con  $w_i^{k+1}$  el vector de incógnitas en cada tiempo  $t^{k+1}$ . Las condiciones de no-flujo a través de algunos elementos o bien, coeficientes no-lineales con cambios de fase, engendran matrices con huecos (ceros).

#### APLICACIONES.

Los siguientes ejemplos, ilustran las diferentes formas que puede tomar la ecuación general de transporte, a cada una de las cuales es aplicable el método DFI. Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se identifican fácilmente en cada caso.

1.- CONDUCCION DEL CALOR EN UN MEDIO ANISOTROPICO Y HETEROGENEO.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) + \rho c \vec{v} \cdot \nabla T + q$$

donde  $\rho$ ,  $c$  y  $K$  son: densidad, calor específico y conductividad térmica del medio;  $T$  su temperatura.

2.- FLUJO SUBTERRANEO TRANSIENTE EN UN MEDIO POROSO SATURADO.

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \cdot \nabla h) + q$$

donde  $h$  es la carga hidráulica,  $K$  la conductividad hidráulica y  $S_s$  el coeficiente de almacenamiento específico.

3.- DIFUSION EN UN MEDIO POROSO.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \cdot \nabla C) - \nabla \cdot (C \vec{v}) - \frac{C^* q^*}{\phi} + Q_1$$

donde  $C$  es la concentración de la sustancia dispersiva,  $D$  el tensor de difusión,  $C^*$ ,  $q^*$  la concentración del soluto y el flujo volumétrico en la fuente o pozo,  $\phi$  es la porosidad y  $Q_1$  la tasa de producción de soluto por reacción química. La velocidad es dada por la ley de Darcy y la carga hidráulica  $h$  se calcula de la ecuación dada en 3.

4.- FLUJO SIMULTANEO DE FLUIDO Y CALOR EN YACIMIENTOS GEOTERMICOS O PETROLEROS.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \sum_{i=1}^2 \rho_i S_i \right) = \nabla \cdot K \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i k_{ri}}{\mu_i} (\nabla P - \rho_i \vec{g}) + Q_v$$

Ecuación del flujo de masa, donde  $\phi$  es la porosidad,  $\rho_i$  densidad del fluido,  $S_i$  la saturación de la fase  $i$  del fluido (gas o aceite, vapor o líquido),  $K$  permeabilidad de la roca,  $k_{ri}$  la permeabilidad relativa de la fase  $i$ ,  $\mu_i$  la viscosidad,  $P$  la presión hidrodinámica y  $\vec{g}$  la gravedad. La ecuación del flujo de energía es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \sum_{i=1}^2 \rho_i S_i h_i + (1 - \phi) \rho_r h_r \right] = \sum_{i=1}^2 \left[ \nabla \cdot K \frac{\rho_i k_{ri} h_i}{\mu_i} (\nabla P - \rho_i \vec{g}) + H_i Q_i \right] - \nabla \cdot (K_D \nabla T)$$

el subíndice  $r$  denota propiedades de la roca;  $h_i$  es la entalpía específica de la fase  $i$  en el yacimiento;  $H_i$  es la entalpía

específica a la salida del pozo;  $Q_i$  el gasto total inyección (+)/producción (-);  $P$  y  $T$  son la presión hidrodinámica y la temperatura promedio del fluido;  $K_D$  es el tensor de coeficientes de dispersión térmica promedio, actuando como un parámetro global de transferencia conductiva.

EJEMPLO.- LA SOLUCION DE LINEA FUENTE  $\infty$ .

Un pozo situado en el centro de un gran yacimiento homogéneo, isotrópico, isotérmico, está produciendo o inyectando agua líquida a una tasa  $q_v$  constante. Se supone que el flujo es laminar y radial; el agua es de una compresibilidad muy pequeña, los gradientes de presión bajos y las propiedades físicas de la roca constantes. El modelo del yacimiento en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial P}{\partial r}; \quad P(r, t)$$

condición inicial:  $P(r, 0) = P_i, \quad \forall r$

condición de frontera:  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t) = P_i$

$$\text{en el pozo: } \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = - \frac{q_v \mu}{2 \pi h K}$$

modelo cuya solución analítica es:

$$P(r, t) = P_i + \frac{q_v \mu}{4 \pi h K} \cdot E_1 \left( \frac{r^2}{4 \eta t} \right)$$

donde  $q_v$  es el gasto volumétrico,  $\eta$  el coeficiente de difusividad,  $h$  el intervalo de producción y  $E_1$  la función integral exponencial. Se programó esta solución, comparando sus resultados con los obtenidos por la técnica de DFI, para un esquema unidimensional radial, en donde los elementos  $V_i$  son círculos concéntricos de diámetros paulatinamente crecientes, pues los cambios importantes ocurren cerca del pozo.

Los resultados se sintetizan en la figura 4 presentando las presiones calculadas entre 0 y 100 m. del pozo, para tres diferentes tiempos. Las DFI proporcionan excelentes resultados casi idénticos a los exactos después de 15 m. No así, en la vecindad del pozo hay diferencias; sin embargo, es bien sabido que la solución de línea fuente infinita representa muy pobremente lo que ocurre realmente en el pozo. Las DFI, mejoran esta representación.

**MÉTODO VARIACIONAL CON ORTOGONALIZACIÓN INCOMPLETA Y REINICIO PARA LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DISPERSOS.**

SOBRE EL ALGORITMO DIOMRES (K,M).- Las diferencias y elementos finitos, al igual que las DFI, utilizan la discretización de variables para resolver aproximadamente las ecuaciones de algún modelo particular. Esas técnicas requieren resolver frecuentemente, como etapa final, un sistema lineal de la forma  $Ax = b$ ; donde el orden (N) del sistema es grande (mil elementos o mas) y la matriz del sistema ( $a_{ij}$ ) es dispersa, con pocos términos en cada ecuación y muchos ceros irregularmente distribuidos. En estas circunstancias, las técnicas iterativas suelen ser mas adecuadas que las directas.

DIOMRES (k,m) es un método iterativo, que permite aprovechar el conocimiento previo que se tenga sobre la solución, para seleccionar la aproximación inicial  $x_0$ , permitiendo además suspender los cálculos cuando la aproximación  $x_n$  sea aceptable o bien, cuando la aproximación lograda asegure que la solución no va a satisfacer alguna restricción. Cada aproximación viene dada como una combinación lineal, de la forma:

$$\vec{x}_n = \vec{x}_0 + \sum_{j=1}^n \vec{v}_j y_j = \vec{x}_0 + \vec{V}_n y_n$$

determinada por: la aproximación inicial, las coordenadas  $y_j$  y por n vectores  $\vec{v}_j$  linealmente independientes (columnas de  $\vec{V}_n$ ), de modo que, en algunos casos, se puede asegurar que  $x_n$  será la solución si no hubo redondeos. DIOMRES(k,m) selecciona las coordenadas de modo que se minimice la norma cuadrada del residuo, definido como:  $r_n = b - A x_n$  para lo cual se iguala a cero la derivada de  $r_n^T r_n$  respecto a  $y_n$  y se llega a un sistema lineal para  $y_n$ :

$$\vec{V}_n^T A^T A \vec{V}_n y_n = \vec{V}_n^T A^T r_0$$

Para crear la base, DIOMRES (k,m) sigue el algoritmo de Arnoldi:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{r}_0}{\|\vec{r}_0\|} \vec{v}_{n+1} = \frac{A \vec{v}_n - \sum_{i=1}^n h_{i,n} \vec{v}_i}{h_{n+1,n}}$$

los valores de  $h_{i,n}$  se escogen de modo que cada vector  $\vec{v}_n$  sea ortogonal a los anteriores y esté normalizado. De este modo, los vectores  $A \vec{v}_i$  quedan en término de los mismos vectores  $\vec{v}_j$ :

$$A \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1} H_n^* ; \vec{r}_0 = \|\vec{r}_0\| \vec{v}_{n+1} e_1$$

donde  $e_1$  es la primera columna de la matriz identidad y los elementos de  $H_n^*$  son los valores de  $h_{i,n}$ . Con esta propiedad y la ortonormalidad de la base, se puede reescribir la primera ecuación:

$$H_n^{*T} H_n^* y_n = \|\vec{r}_0\| H_n^{*T} e_1$$

Enseguida, DIOMRES(k,m) multiplica a la matriz  $H_n^*$  por una matriz ortonormal  $Q_n$  de modo que  $Q_n H_n^* = U_n^*$ ; donde  $U_n^*$  está compuesto por una matriz triangular superior  $U_n$  y un último renglón nulo. Debido a que, por construcción,  $h_{i,j} = 0$  cuando  $i > j+1$ , la matriz  $Q_n$  se puede construir mediante una sucesión de matrices de rotación:

$$\begin{pmatrix} +\cos \vartheta & +\sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & +\cos \vartheta \end{pmatrix} ; \quad \begin{aligned} \sin \vartheta &= \frac{h_{n+1,n}}{\sqrt{h_{n,n}^2 + h_{n+1,n}^2}} \\ \cos \vartheta &= \frac{h_{n,n}}{\sqrt{h_{n,n}^2 + h_{n+1,n}^2}} \end{aligned}$$

al multiplicar los renglones (n,n+1) van eliminando, sucesivamente, a los elementos  $h_{n+1,n}$ . Usando  $U_n^*$  y la ortogonalidad de  $Q_n$ :  $Q_n Q_n^T = I$ , la penúltima ecuación queda:

$$U_n^T U_n^* y_n = U_n^T z_n ; \text{ donde : } z_n = \|\vec{r}_0\| Q_n e_1$$

y como  $U_n$  es invertible, las coordenadas óptimas quedan dadas por:  $y_n = U_n^{-1} z_n$ ; mas fáciles de calcular. Además, el uso que se hizo de las matrices ortonormales permite conocer la norma del residuo desde antes de actualizar la aproximación :

$$\|\vec{b} - A \vec{x}_n\| = |z_n(n+1)|$$

sustituyendo estas coordenadas se obtiene:

$$x_n = x_0 + \vec{V}_n U_n^{-1} z_n = x_0 + W_n z_n$$

donde las columnas de  $W_n$  se pueden calcular fácilmente por que  $U_n$  es triangular superior:

$$w_n = (v_n - \sum_{i=1}^{n-1} u_{i,n} w_i) / u_{n,n}$$

y de esta forma es posible actualizar la aproximación inmediatamente:

$$x_n = x_{n-1} + z_n w_n$$

El inconveniente de usar la ortogonalización completa es que, después de varias iteraciones, se requiere mucha memoria para almacenar a la base  $V_n$  y, además, no es necesaria cuando el sistema es simétrico ya que, en este caso,  $h_{ij} = 0$  para  $j > i+1$ . Pensando en esto, DIOMRES (k,m) sólo ortogonaliza a  $Av_n$  con los últimos k vectores  $v_j$ , de esta forma se reducen los requerimientos de memoria y el tiempo empleado en cada iteración.

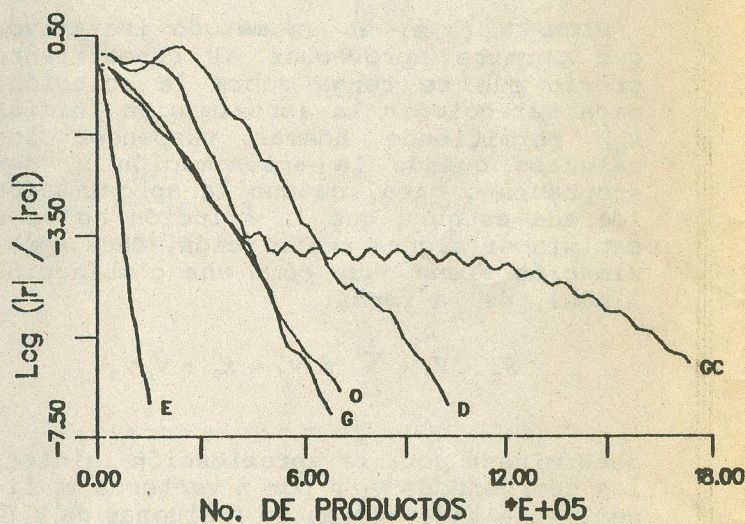
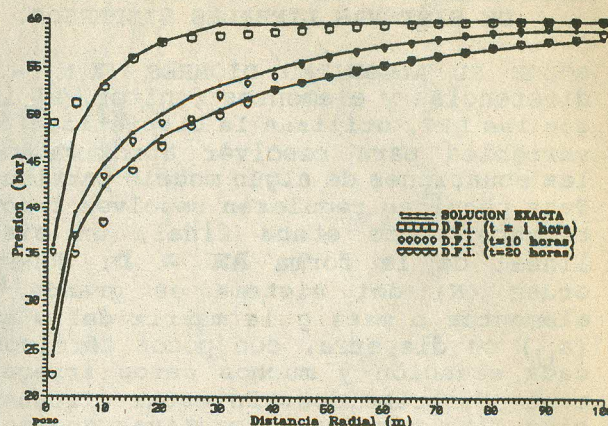
Cuando k es menor que un cierto mínimo, que depende del caso, los métodos iterativos de la familia del gradiente conjugado tienden a perder su velocidad de convergencia y por ello resulta conveniente introducir el reinicio cada vez que esto ocurre. DIOMRES (k,m) reinicia cada m iteraciones, de modo que al emplear la pareja adecuada de parámetros (k,m), se puede reducir mucho el tiempo total que se emplee para resolver a un sistema. Si el sistema es simétrico, los parámetros adecuados son (2,N). Actualmente se está buscando la manera de facilitar la identificación de los parámetros óptimos para los casos no simétricos. A DIOMRES(k,m) se le puede incorporar la técnica del preconditionamiento del sistema para mejorar su velocidad de convergencia, siendo la forma mas adecuada el usarlo por la derecha.

La figura 5 muestra varias gráficas de comparación sobre la eficiencia numérica de DIOMRES(k,m) con respecto a otras técnicas. (Una descripción completa del método en: De la Torre Elí, 1990 y 1991).

#### REFERENCIAS

- Clough, R., (1960). "THE FINITE ELEMENT IN PLANE STRESS ANALYSIS"; Proc. 2<sup>nd</sup> ASCE, Conf. Elec. Comp., Pittsburg, Pa.
- Cooley, R., (1971). "A FINITE DIFFERENCE METHOD FOR VARIABLY SATURATED POROUS MEDIA: APPLICATION TO A SINGLE PUMPING WELL"; Water Res. Research, Vol. 7, No. 6 (pp. 1607-1625).
- De la Torre E., (1990). "SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES GRANDES Y HUECOS MEDIANTE METODOS ITERATIVOS BASADOS EN LOS ESPACIOS DE KRYLOV"; Tesis de Licenciatura (Premio Sotero Prieto 1991 de la Soc. Matemática Mex.); Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; Morelia, Mich. Junio 1990).
- De la Torre E., (1991). "RESOLUCION DE GRANDES SISTEMAS LINEALES DISPERSOS CON APLICACION AL MODELADO DE YACIMIENTOS HIDROTERMALES". (en prensa); GEOTERMIA - Revista Mexicana de Geonergía, Vol. 7, No. 3.
- Dusinberre, G., (1961). "HEAT TRANSFER CALCULATIONS BY FINITE DIFFERENCES"; International Textbooks, Scranton, Pa.
- Edwards, A., (1972). "TRUMP: A COMPUTER PROGRAM FOR TRANSIENT AND STEADY STATE TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS"; Nat. B. of Std., Springfield, Va.
- Gallagher, R., (1989). "THIRTY YEARS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS - ARE THERE ISSUES YET TO BE RESOLVED?"; Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 6, No. 1. (pp. 1-8); Elsevier Science Publishers B.V.

Fig. 4.- Comparación entre Presiones Calculadas por la Solución Exacta de Línea Fuente y el M.D.F.I.



E : DIOMRES (2,4)                      G : GMRES (5)  
O : ORTHOMIN (2)                      D : DIOM (3)  
GC: GRADIENTE CONJUGADO

Figura 5.- Cifras correctas en Residuo Vs. Trabajo Computacional sistema de orden 961, preconditionado.

- Haaser, N.; LaSalle, J.; Sullivan, J., (1970). "ANÁLISIS MATEMÁTICO 2"; Editorial Trillas, México, D.F.
- MacNeal, R., (1953). "AN ASYMMETRIC FINITE DIFFERENCE NETWORK"; Quart. Appl. Math., Vol. 2 (pp. 295-310).
- Narasimhan, T.; Witherspoon, P., (1976). "AN INTEGRATED FINITE DIFFERENCE METHOD FOR ANALYZING FLUID FLOW IN POROUS MEDIA"; Water Res. Research, Vol. 12, No. 1, (pp. 57-64).
- Pruess, K.; Schroeder, R., (1979). "SHAFT 79 USER'S MANUAL"; Lawrence Berkeley Laboratory (LBL-10861), Berkeley, Ca.
- Pruess, K., (1988). "SHAFT, MULKOM, TOUGH: A SET OF NUMERICAL SIMULATORS FOR MULTIPHASE FLUID AND HEAT FLOW"; GEOTERMIA Revista Mexicana de Geonergía, Vol. 4, no. 1, (pp. 185-200)
- Suárez, C., (1990). Reporte Interno C.F.E., inédito.