

RESONANCIA EN LA REFLEXION DE ONDAS DE ROSSBY

Federico Graef Z.

Centro de Investigación Científica y
de Educación Superior de Ensenada (CICESE)

RESUMEN

La interacción alineal entre una onda de Rossby (OR) incidente y una OR reflejada produce un flujo estacionario (i.e. independiente del tiempo) paralelo a la costa y un flujo transitorio de frecuencia dos veces la de la onda incidente. Si el forzamiento transitorio es resonante, i.e. una OR libre, la respuesta resonante debe tener amplitud nula en la costa para poder satisfacer ahí la condición de no flujo normal. La expansión perturbativa directa predice que la amplitud de la respuesta resonante crece linealmente en la coordenada perpendicular a la costa, y . Resonancia es posible sólo si $0 < |\sin \alpha| \leq 1/3$, donde α es el ángulo entre la costa y la dirección este. Esta condición es satisfecha por varias costas en el océano. Se describe un método gráfico para encontrar una tríada resonante.

Usando el método de escalas múltiples, se encuentra que las amplitudes de onda de la tríada resonante son funciones periódicas de y , de tal manera que el flujo total de energía de la tríada a través de cualquier plano paralelo a la pared-costa sea cero, como se requiere por conservación de energía. Las ondas de la tríada resonante son paquetes de onda.

Como posible aplicación oceanográfica se encuentra que la distancia de la costa a la que uno esperaría encontrar amplitudes grandes de periodo semi-anual si OR anuales estuvieran incidiendo es del orden de 100 km.

INTRODUCCION

La interacción alineal débil entre una onda de Rossby (OR) incidente y la reflejada produce (Graef-Ziehl, 1990; en adelante abreviado como GZ): 1) un flujo Euleriano estacionario (i.e. independiente del tiempo) paralelo a la costa y 2) un flujo de frecuencia dos veces (2ω) la frecuencia de la OR incidente. En GZ se demostró que el forzamiento de 2ω podía ser resonante sólo si $0 < |\sin \alpha| \leq 1/3$, donde α es el ángulo entre la costa y la dirección hacia el este. ¿Qué pasa si la interacción no lineal entre una OR incidente y la reflejada excita una OR libre? Específicamente: dada la posibilidad de que la onda incidente, reflejada y forzada formen una tríada resonante, ¿cómo encontrarlas?; ¿es posible encontrar una solución uniformemente válida en el caso resonante?

En la teoría de interacciones débiles hay gran interés en estudiar interacciones resonantes porque las ondas producidas por estas tienen amplitudes grandes comparadas con las interacciones no-resonantes (Pedlosky, 1987).

El estudio de interacciones resonantes entre OR ha sido objeto de varias investigaciones (por ejemplo, Longuet-Higgins y Gill, 1967; Plumb, 1977; Mysak, 1978). Hasta donde el autor sabe, interacciones resonantes entre OR planetarias baroclínicas en un océano con una frontera lateral no han sido estudiadas.

ANTECEDENTES TEORICOS

El sistema de coordenadas es x paralelo, y perpendicular a la costa y z verticalmente hacia arriba. La ecuación gobernante es la ecuación cuasi-geostrófica (QG) de vorticidad potencial (Pedlosky, 1987; GZ) y las condiciones de frontera son cero velocidad normal en la costa ($y = 0$), en el fondo plano y en la superficie (tapa rígida). Se busca una solución perturbativa para la función de corriente QG (no-dimensional): $\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \dots$, donde $\varepsilon = U/(\beta L^2)$ es el número de Rossby (GZ).

Si la solución a $O(1)$ es la superposición de una OR incidente y la reflejada, i.e. si

$$\psi^{(0)} = A \Psi_n(z) (\cos \theta_1^{(0)} - \cos \theta_2^{(0)}) , \quad (1)$$

donde A es amplitud, $\Psi_n(z)$ y λ_n son eigenfunción y eigenvalor del problema vertical de Sturm-Liouville, $\theta_i^{(0)} \equiv kx + l_i y - \omega t + \phi$, $i = 1, 2$ y se satisfacen las relaciones de dispersión, i.e. $\omega = \sigma_n(k, l_i) \equiv -(k \cos \alpha + l_i \sin \alpha) / (k^2 + l_i^2 + L^2 f_0^2 \lambda_n)$, $i = 1, 2$, entonces las ecuaciones de perturbación a $O(\varepsilon)$ son

$$\partial_t \left\{ \nabla^2 \psi^{(1)} + \partial_z \left[\frac{1}{S(z)} \partial_z \psi^{(1)} \right] \right\} + \cos \alpha \times \\ \partial_x \psi^{(1)} + \sin \alpha \partial_y \psi^{(1)} = -B_{12} \Psi_n^2(z) \times \\ \left[\cos (\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - \cos (\theta_1^{(0)} + \theta_2^{(0)}) \right] , \quad (2)$$

donde $S(z) = H^2 N^2(z) / f_0^2 L^2$ es el parámetro de estratificación (Pedlosky, 1987), H la profundidad, $N(z)$ la frecuencia de Brunt-Väisälä, $B_{12} \equiv \frac{1}{2} A^2 k (l_1 - l_2) (l_1^2 - l_2^2)$,

$$\partial_x \psi^{(1)} = 0 \quad \text{en } y = 0 , \quad (3)$$

$\partial_t \partial_z \psi^{(1)} = -J(\psi^{(0)}, \partial_z \psi^{(0)}) \equiv 0$ en $z = -1, 0$ y $\psi^{(1)}$ acotado cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \infty$.

La solución para $\psi^{(1)}$ se escribe $\psi^{(1)} = \psi_{hom}^{(1)} + \psi_{p1}^{(1)} + \psi_{p2}^{(1)}$, donde $\psi_{p1}^{(1)}$ es el flujo estacionario paralelo a la costa forzado por el término $\sim \cos (\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})$ en (2), primeramente descrito

en Mysak y Magaard (1983),

$$\psi_{p2}^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{\lambda - L^2 f_0^2 \lambda_m} \Psi_m(z) \sin (\theta_1^{(0)} + \theta_2^{(0)}) , \quad (4)$$

en la que $b_m = -B_{12} \int_{-1}^0 \Psi_n^2 \Psi_m dz / (2\omega) \equiv -B_{12} \xi_{nnm} / (2\omega)$ y

$$\lambda \equiv - \left\{ (2k)^2 + (l_1 + l_2)^2 + \frac{1}{2\omega} [2k \cos \alpha + (l_1 + l_2) \sin \alpha] \right\} , \quad (5)$$

y $\psi_{hom}^{(1)}$ es una solución homogénea de (2), que se escoge para satisfacer (3).

La solución (4) es válida si $\lambda \neq L^2 f_0^2 \lambda_m$, lo que es una condición suficiente para no tener resonancia. Para tener resonancia, es necesario que (i) $\lambda = L^2 f_0^2 \lambda_M$, porque entonces, y sólo entonces, $2\omega = \sigma_M(2k, l_1 + l_2)$ y además (ii) $\xi_{nnM} \neq 0$.

El objeto de este trabajo es estudiar qué pasa cuando hay resonancia, i.e. cuando todas las condiciones de arriba se cumplen y se encuentra una solución aceptable a dichas condiciones.

SOLUCION DE LAS CONDICIONES DE RESONANCIA

Para satisfacer las condiciones de resonancia se tienen tres ecuaciones: $\omega = \sigma_n(k, l_i)$, $i = 1, 2$ y $2\omega = \sigma_M(2k, l_1 + l_2)$, y seis incógnitas: k , l_1 , l_2 , ω , n y M . Resolviendo en favor de k , se obtiene

$$k_{\pm}^{(res)} = -\frac{\cos \alpha}{8\omega} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - 9 \sin^2 \alpha}{(4\omega)^2} - L^2 f_0^2 \lambda_M} . \quad (6)$$

La restricción $|\sin \alpha| \leq \frac{1}{3}$ es obvia para tener $k^{(res)}$ real y por lo tanto que la solución esté acotada cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Más aún, para asegurar que $l_{1,2}$ sean reales y diferentes, $k_{\pm}^{(res)} \in (k_2, k_1)$, donde $k_{1,2} = -\cos \alpha / (2\omega) \pm [1 / (4\omega^2) - L^2 f_0^2 \lambda_n]^{1/2}$.

Para OR barotrópicas incidentes de periodos ~ 1 mes, como lo sugieren datos recientes de altimetría, las longitudes de onda de la tríada son

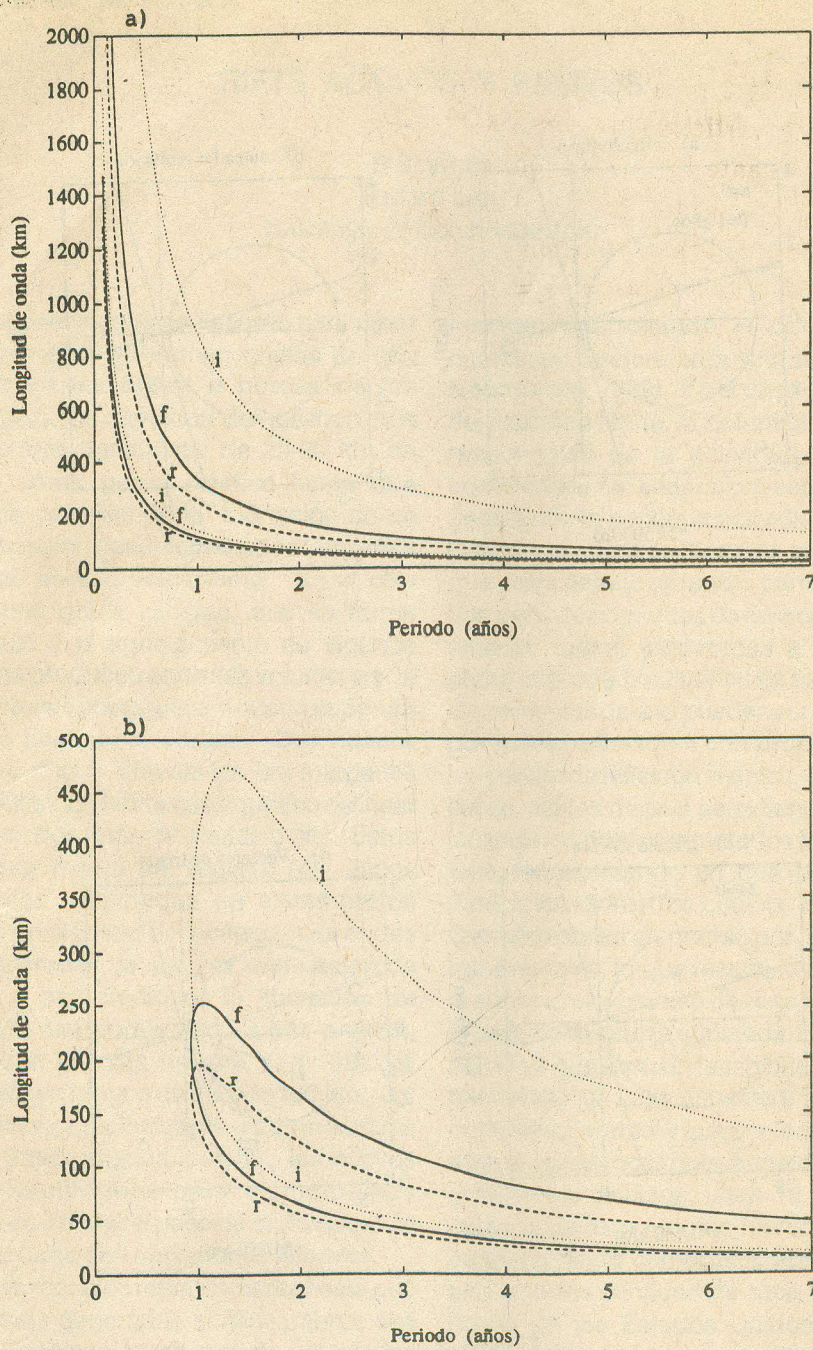


FIGURA 1

FIGURA 1. Longitudes de onda (km) de la tríada resonante (i=incidente, r=reflejada y f=forzada) versus periodo (años) del par de OR incidente-reflejada para $|\alpha| = 10^\circ$ (latitud de referencia $\theta_0 = 25^\circ$). a) $n = 0 \Rightarrow M = 0$; b) $n = 1$ y $M = 1$.

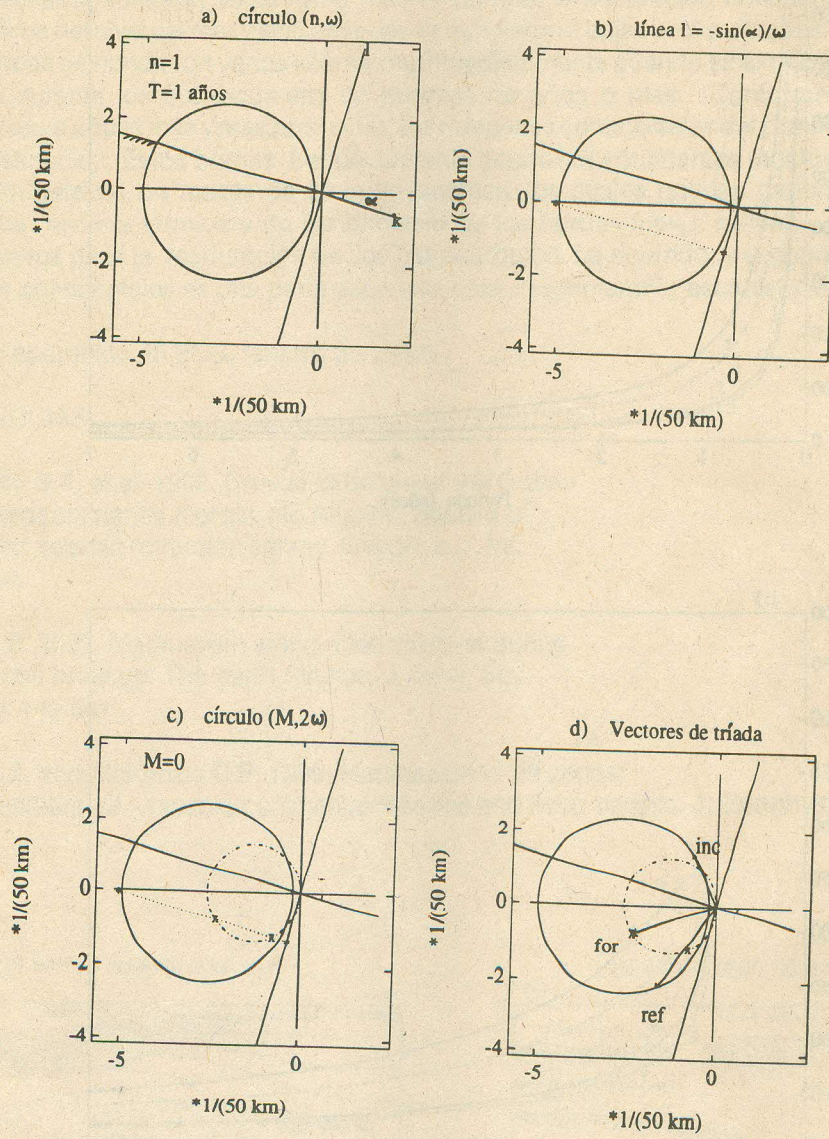


FIGURA 2

FIGURA 2. Método gráfico para encontrar las tríadas resonantes dado el número de modo n y la frecuencia ω de la onda incidente; $\alpha = 15^\circ$, $\theta_0 = 25^\circ$. a) El círculo (n, ω) con $n = 1$, $T = 2\pi/\omega = 1$ año. b) La línea recta $l = -\sin \alpha/\omega$ (paralela a la costa). c) El círculo $(M, 2\omega)$, $M = 0$ y sus intersecciones con $l = -\sin \alpha/\omega$ en $(2k_{\pm}^{(res)}, l_1 + l_2)$. d) Los vectores número de onda de una tríada resonante (inc=incidente, ref=reflejada y for=forzada).

$O(1000 \text{ km})$ mientras que para OR baroclínicas incidentes de periodo anual hay un rango de 100 a 900 km (Figura 1).

El siguiente procedimiento describe un método gráfico para encontrar las tríadas resonantes (ver Figura 2):

1. Dibujar el círculo (n, ω) , lugar geométrico de los vectores de onda $\vec{k}$ de los pares de OR incidente-reflejada de modo n y frecuencia ω .
2. Dibujar la línea recta paralela al eje k dada por la ecuación $l = -\sin \alpha / \omega (= l_1 + l_2)$.
3. Escoger un número de modo M y calcular $A_M^2 = 1/(16\omega^2) - L^2 f_0^2 \lambda_M$. Si $A_M^2 > 0$ entonces dibujar el círculo $(M, 2\omega)$ de radio A_M y centro en $(-\cos \alpha / 4\omega, -\sin \alpha / 4\omega)$. Si este círculo intersecta la línea $l = -\sin \alpha / \omega$, entonces los puntos de intersección (a lo más dos) tienen coordenadas $[2k_{\pm}^{(res)}, l_1 + l_2]$; en otro caso, no hay tríadas resonantes. Si $A_M^2 \leq 0$ entonces no existen OR de modo M y frecuencia 2ω . Escoger una M más pequeña.
4. Los puntos de intersección de las rectas $k = k_{\pm}^{(res)}$ con el círculo (n, ω) son las puntas de $\vec{k}_{inc}$ y $\vec{k}_{ref}$. Podría pasar que ninguna de las dos líneas $k = k_{\pm}^{(res)}$ intersectara el círculo (n, ω) ; en tales casos no hay tríadas resonantes con $l_{1,2}$ real.

METODO DE ESCALAS MULTIPLES

Cuando hay resonancia, la solución para el modo M crece linealmente en y (GZ; Graef, 1993). Se puede obtener una solución uniformemente válida a $O(\varepsilon)$ usando el método de escalas múltiples, en el que se introduce una nueva escala espacial, $Y_1 = \varepsilon y$, y las derivadas respecto a y se transforman $\partial_y \rightarrow \partial_y + \varepsilon \partial_{Y_1} + \dots$, etc. Ecuación (2) tiene ahora a $-2\partial_t \partial_{Y_1} \psi^{(0)} - \sin \alpha \partial_{Y_1} \psi^{(0)}$ en su lado derecho.

Si siguiendo a Pedlosky (1987), $\psi^{(0)}$ se escribe como la superposición de los tres paquetes de onda que participan en la tríada resonante

$$\psi^{(0)} = A_1(Y_1) \Psi_n(z) \cos \theta_1^{(0)} - A_2(Y_1) \times \Psi_n(z) \cos \theta_2^{(0)} + A_3(Y_1) \Psi_M(z) \cos \theta_3^{(0)} \quad (7)$$

donde $\theta_i^{(0)} \equiv kx + l_i y - \omega t + \phi_i(Y_1)$, $i = 1, 2$ y $\theta_3^{(0)} = \theta_1^{(0)} + \theta_2^{(0)}$. La ecuación QG a $O(1)$ no tiene ∂_{Y_1} así que es satisfecha por (7); las amplitudes y fases actúan como constantes a $O(1)$ y su dependencia en Y_1 se determina a $O(\varepsilon)$ al eliminar los términos seculares. Sin embargo, para que (7) satisfaga la condición $\partial_x \psi^{(0)} = 0$ en $y = 0$ se requiere que

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_2 = A \\ \phi_1 &= \phi_2 = \phi \\ A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } Y_1 = 0. \quad (8)$$

La solución para (2) se halla expandiendo $\psi^{(1)}$ en términos de la base completa de eigenfunciones $\{\Psi_m(z)\}$. Después de algo de álgebra se llega a que los términos seculares se eliminan si $\phi_1 = \phi_2 = \phi = \text{constante}$ y las amplitudes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales de primer orden (Graef, 1993)

$$\left. \begin{aligned} \partial_{Y_1} A_1 - \gamma A_2 A_3 &= 0 \\ \partial_{Y_1} A_2 + \gamma A_1 A_3 &= 0 \\ \partial_{Y_1} A_3 - \gamma_3 A_1 A_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

donde $\gamma \equiv k \sin \alpha (l_1 - l_2) \xi_{nnM} / (4\omega^2)$ y $\gamma_3 = 2\omega(l_1 - l_2)\gamma / (3 \sin \alpha)$.

La componente- y de la velocidad de grupo de las ondas es $c_{gyi} = (-1)^i \omega (l_1 - l_2) / K_i^2$, $i = 1, 2$ y $c_{gy3} = 3 \sin \alpha / K_3^2$, donde $K^2 = |\vec{k}|^2 + L^2 f_0^2 \lambda_n$ (Graef, 1993). La expresión para c_{gy3} indica que la onda excitada A_3 es una reflejada (incidente) para una costa occidental (oriental), resultado que está de acuerdo con la idea de intensificación occidental.

Combinando dos primeras integrales independientes de (9) se puede obtener

$$c_{gy1} K_1^2 A_1^2 + c_{gy2} K_2^2 A_2^2 + c_{gy3} K_3^2 A_3^2 = 0, \quad (10)$$

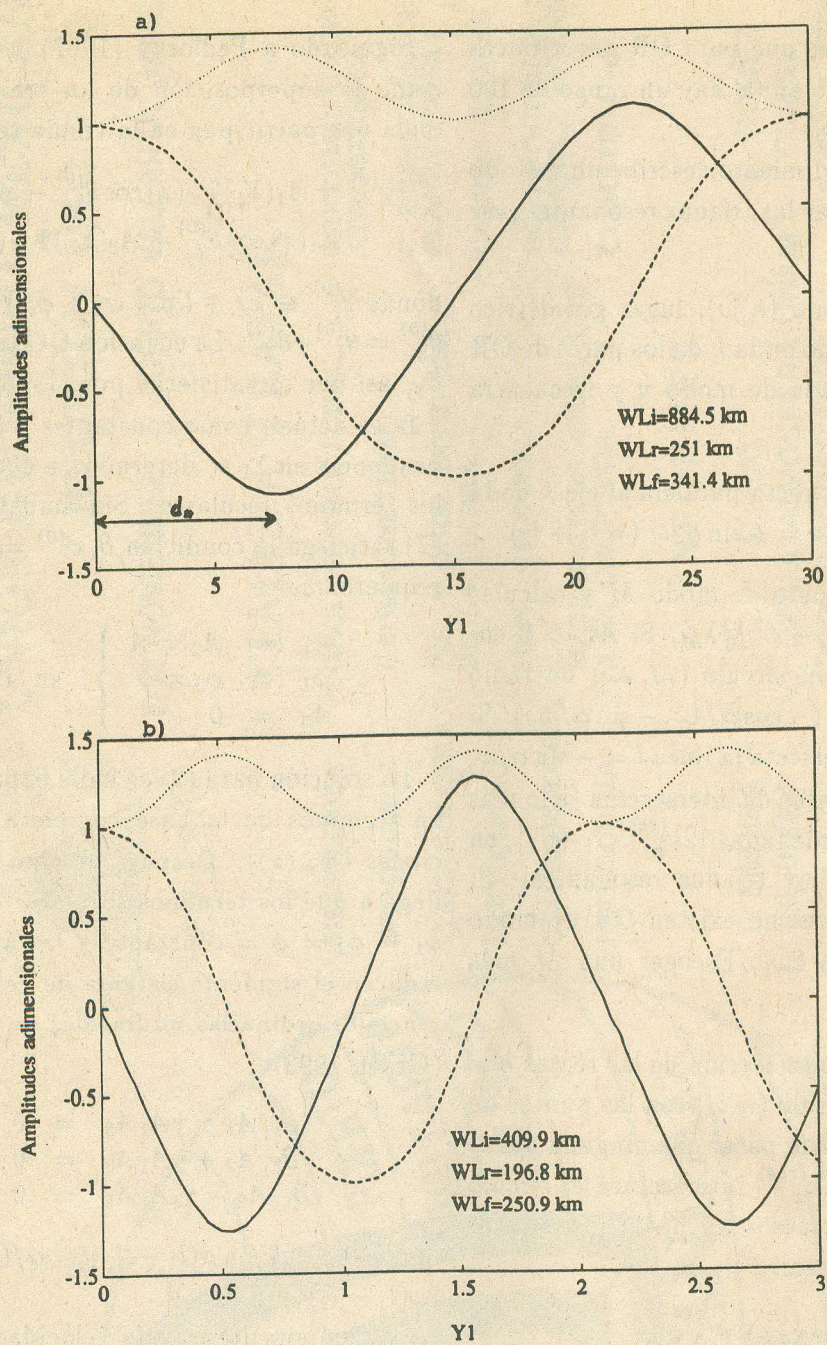


FIGURA 3

FIGURA 3. Las amplitudes de onda o envolventes de una tríada resonante como función de $Y_1 = \varepsilon y$ [soluciones del sistema (9)]. Línea punteada: A_1 u OR incidente; línea quebrada: A_2 u OR reflejada; línea sólida: A_3 u OR forzada. Las longitudes de onda (WLs) correspondientes se indican (i=incidente, r=reflejada, f=forzada). $\theta_0 = 25^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $T = 1$ year. a) $n = M = 0$; b) $n = 1$, $M = 1$.

lo que significa que la suma de los flujos de energía promedio (o flujo total) normal a la costa es igual a cero, como lo requiere la conservación de energía.

La solución numérica de (9) se muestra en Figura 3 para dos casos. Claramente, las amplitudes o envolventes de los paquetes de onda son periódicas en Y_1 . A_3 crece linealmente cerca de la costa, como lo predice la expansión directa (Graef, 1993). El eje Y_1 puede dimensionalizarse usando $y_* = LY_1/\varepsilon$.

Sería de interés para aplicaciones oceanográficas saber a qué distancia de la costa uno esperaría encontrar amplitudes grandes de periodo semi-anual si OR anuales inciden sobre la costa. Esta distancia (d_*) se tomó como aquella a la cual $|A_3|$ tiene su primer máximo (ver Figura 3). Se calculó d_* como función de U_i , la máxima rapidez horizontal de las partículas de la OR incidente (en $y = z = 0$); se puede mostrar que $d_* \sim 1/U_i$. Se obtuvo que para $U_i = O(1 \text{ cm/sec})$, $d_* = O(100 \text{ km})$.

CONCLUSIONES

Cuando la tercer onda excitada por la interacción no-lineal entre una OR incidente y la reflejada es libre, la expansión directa predice un crecimiento lineal en su amplitud en la dirección normal a la costa (y).

Usando escalas múltiples, se muestra que la expansión directa es correcta cerca de la costa. Más lejos, las amplitudes de onda de la tríada son funciones periódicas lentas de y , de tal manera que el flujo de energía de la tríada a través de cualquier plano paralelo a la pared-costa es cero, como lo requiere conservación de energía. Esta modulación en su amplitud es la envolvente de un paquete de onda.

Se encuentra que hay costas en el océano que satisfacen $0 < |\sin \alpha| \leq 1/3$, i.e. donde resonancia es posible. Por ejemplo, en el Atlántico, la costa Norte de Cuba y Grandes Antillas ($\alpha =$

19°); en el Indico, la costa Sur de Sud-Africa (173°) y en el Pacífico las Islas Aleutianas (166°).

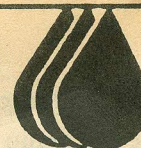
Agradecimientos. El autor agradece los comentarios y sugerencias de Peter Muller, Pedro Ripa, Edgar Pavía y dos árbitros anónimos. Financiamiento otorgado por la Secretaría de Programación y Presupuesto y por CONACYT bajo el proyecto 0025-T9105.

REFERENCIAS

- Graef-Ziehl, F., 1990: Reflection of nonlinear baroclinic Rossby waves at a non-zonal boundary and the driving of secondary mean flows. Tesis doctoral, University of Hawaii, 283 pp.
- Graef, F., 1993: First order resonance in the reflection of baroclinic Rossby waves. *J. Fluid Mech.*, en prensa.
- Longuet-Higgins, M. S. and A. Gill, 1967: Resonant interactions between planetary waves. *Proc. Roy. Soc. A* **299**, 120-140.
- Mysak, L. A., 1978: Resonant interactions between topographic planetary waves in a continuously stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, **84**, 769-793.
- Mysak, L. A., and L. Magaard, 1983: Rossby wave driven Eulerian mean flows along non-zonal barriers, with application to the Hawaiian Ridge. *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 1716-1725.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*. Second edition. Springer-Verlag, 624 pp.
- Plumb, R. A., 1977: The stability of small amplitude Rossby waves in a channel. *J. Fluid Mech.*, **80**, 705-720.



Maestría y Doctorado en Ingeniería Hidráulica

IMTA

La División de estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM ofrece cursos de maestría y doctorado en Ingeniería Hidráulica en sus instalaciones de Progreso, Morelos.

Las asignaturas que se imparten son, entre otras:

Hidráulica general

Métodos Matemáticos

Mecánica de Fluidos

Hidrología de Superficie

Irrigación y drenaje

Geohidrología

Métodos Numéricos

Obras Hidráulicas

La maestría y el doctorado están dirigidos a egresados de ingeniería civil, ciencias agropecuarias y carreras afines. Estos cursos están apoyados por el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua a través de becas, biblioteca, computadoras y laboratorios.

Informes al (73) 19-40-49 o 19-40-00 ext. 532 con el Dr. Alvaro Muñoz en Paseo Cuauhnáhuac #8532, Progreso, Mor. C.P. 62550

POSGRADO
EN

Geofísica



Unidad Académica de los Ciclos
Profesionales y de Posgrado del
Colegio de Ciencias y Humanidades

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

El instituto de Geofísica y la Unidad Académica de los ciclos Profesional y de Posgrado del CCH de la UNAM ofrecen a todos los profesionales en Física, Geofísica, Geología, Ingeniería, Química, o alguna área académica afín, los Posgrados de Maestría y Doctorado de Geofísica dentro de las siguientes áreas:

AGUAS SUBTERRÁNEAS

EXPLORACIÓN GEOFÍSICA

SISIMOLOGÍA Y FÍSICA DEL INTERIOR DE LA TIERRA

ESTUDIOS ESPACIALES

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL DE SISTEMAS GEOFÍSICOS

Informes: Instituto de Geofísica UNAM

Cd. Universitaria

México 04510 D.F.

Tel 662-4130 y 622-4137 Fax 550-2486