

LA EXACTITUD DEL PROBLEMA DIRECTO DE SONDEOS ELECTROMAGNÉTICOS TRANSITORIOS

Carlos Flores Luna

Depto. de Geofísica Aplicada. División de Ciencias de la Tierra. CICESE

Km 107, Carret. Tijuana-Ensenada, Ensenada, B.C., 22840, México

Correo electrónico: cflores@cicese.mx

RESUMEN

Se analizan los diferentes factores que afectan la exactitud del método de convolución usado en el cálculo de la respuesta electromagnética transitoria sobre medios estratificados, enfatizándose el equilibrio entre la exactitud de la respuesta y la rapidez de cómputo. Los factores de exactitud analizados son: el valor de la tolerancia de las convoluciones, la corrección de rampas, la integración del campo a lo largo de la espira no-circular, las aproximaciones de un bipolo de corriente con dipolos central y equivalente, la aproximación de una espira cuadrada con una circular, la interpolación del kernel de la transformada de Fourier, la corrección por la función de transferencia de la bobina receptora y la incertidumbre en la posición de la bobina. El ignorar el efecto de la función de transferencia de la bobina es el factor que más afecta a la respuesta de tiempos cortos. Las fuentes más importantes de inexactitud en los tiempos largos son la corrección de rampas y la interpolación del kernel de Fourier.

INTRODUCCIÓN

El método del sondeo electromagnético transitorio (SEMT o TDEM por sus siglas en inglés) es una técnica de exploración geofísica usada para estimar la resistividad eléctrica del subsuelo, con aplicaciones en diversas áreas (geohidrología, minería, geotermia, etc.). En general, los SEMT son realizados con una unidad transmisora unida a un alambre (espira grande, bobina o bipolo eléctrico) y un sensor (bobina o dipolo eléctrico) que recibe y manda la señal a una unidad receptora. Al inyectar una corriente constante en el alambre transmisor se produce un campo magnético primario. Un corte rápido de esta corriente ocasiona la interrupción del campo magnético primario, lo que produce, para satisfacer la ley de Faraday, la inducción electromagnética de corrientes eléctricas en el subsuelo. Estas corrientes, que fluyen en trayectorias cerradas en el subsuelo, migran en profundidad y lateralmente, mientras que su intensidad disminuye conforme pasa el tiempo, lo que genera a su vez un campo magnético secundario transitorio. Este campo secundario induce un voltaje variable en tiempo en el receptor. La forma del decaimiento de este voltaje contiene información sobre la resistividad del subsuelo, puesto que la magnitud y distribución de las corrientes inducidas depende de la resistividad. El carácter migratorio en profundidad de las corrientes es usado como un control de la profundidad, es decir, los voltajes de tiempos cortos proveen información de la resistividad somera, mientras que los de tiempos largos la dan de la resistividad a mayor profundidad.

Actualmente existe una gran variedad de arreglos transmisor (Tx) – receptor (Rx) y de equipos comerciales que manejan diferentes formas de la corriente en el Tx (Spies y Frischknecht, 1991). En este trabajo se manejan únicamente los arreglos de bobina central y no-central. En ambos arreglos el Tx consta de

una gran espira cuadrada o rectangular sin contacto galvánico con el terreno. El Rx es una bobina horizontal multivuelta, sensible a la derivada temporal de la componente vertical del campo magnético. En el arreglo de bobina central (el más popular en estudios geohidrológicos y geotérmicos), la bobina receptora se encuentra localizada en el centro de la espira (Figura 1a), mientras que en el de bobina no-central se localiza en cualquier punto, dentro o fuera de la espira. Este último arreglo es usado en exploración minera o en otras aplicaciones donde se desea realizar un mapeo lateral de la resistividad del subsuelo.

En este artículo se emplean los parámetros instrumentales del sistema TEM57 de la marca Geonics, un equipo de amplia distribución mundial. La corriente en este sistema está caracterizada por ser de tipo trapezoidal, bipolar y periódica (Figura 1b), con los períodos de 33.3, 133 y 333 milisegundos (ms) (que corresponden a las frecuencias de repetición de 30, 7.5 y 3 Hz, respectivamente). Para cada frecuencia la unidad receptora computarizada graba el decaimiento del voltaje en 20 ventanas logarítmicamente distribuidas dentro del primer y segundo intervalos de corte de corriente (Figura 1c). Para reducir el efecto del ruido electromagnético ambiental, generalmente varias centenas de estos voltajes son promediados.

El modelo de resistividades más usado para interpretar cuantitativamente los datos de SEMT es el de un subsuelo horizontalmente estratificado. Existen varios métodos para calcular la respuesta en superficie, dados el arreglo transmisor-receptor y un modelo estratificado, es decir, de resolver el problema directo. Entre éstos se encuentran el método de convolución (Anderson, 1975, 1979; Fitterman y Anderson, 1987), serie de Fourier (Verma y Rai, 1982; Asten, 1987) y Gaver-Stehfest (Knight y Raiche, 1982). En este trabajo adoptamos el método de convolución, dadas sus características de eficiencia y amplio uso en la comunidad geofísica. La interpretación de los son-

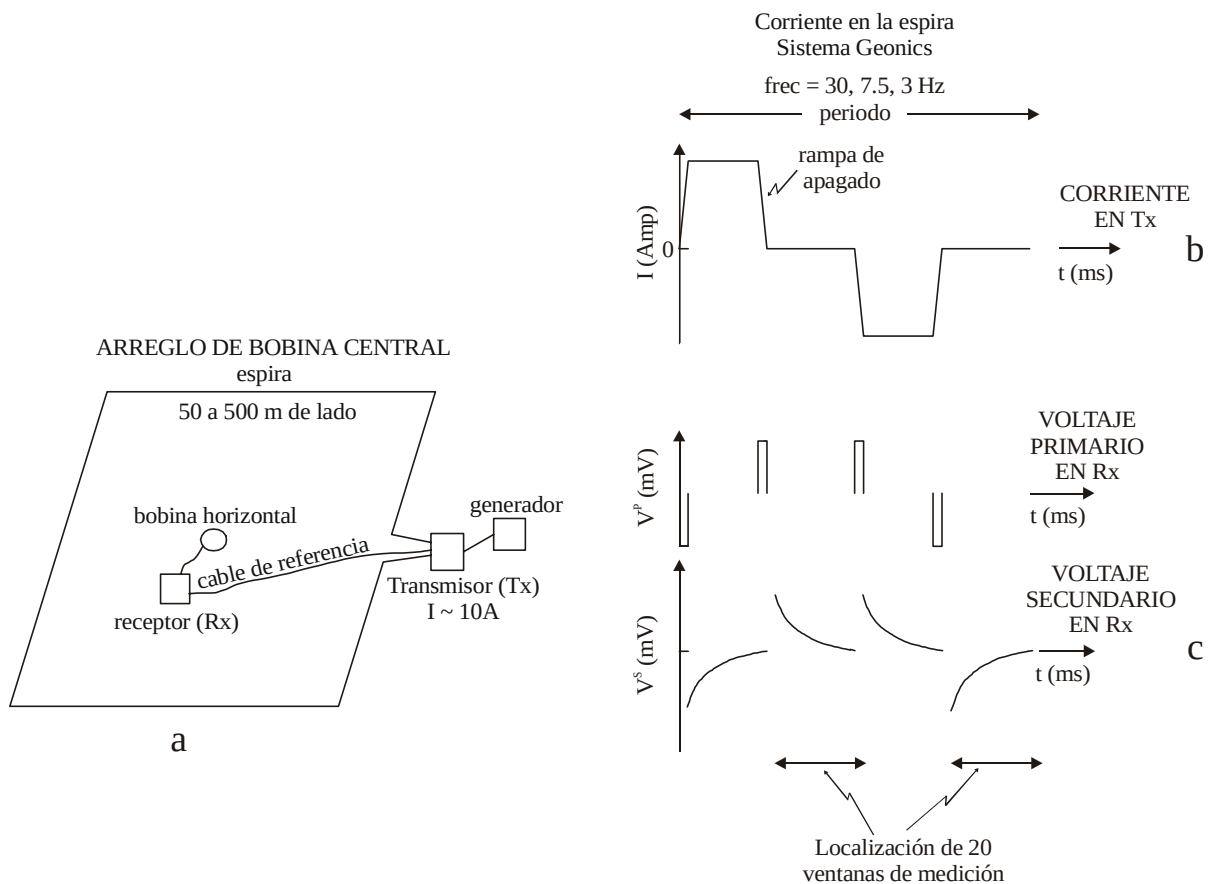


Figura 1. a) Arreglo de bobina central. b) Forma de la corriente inyectada en la espira transmisora del sistema Geonics. c) Voltajes primario y secundario inducidos en la bobina receptora. Localización de las ventanas de medición del voltaje en los dos lapsos de ausencia de corriente.

deos generalmente se realiza con algún esquema de inversión linealizada (Jupp y Vozoff, 1975; Inman, 1975; Raiche et al, 1985) en donde, a partir de un modelo inicial, en forma iterativa se estiman los parámetros del modelo (resistividades y espesores de las capas) para que la respuesta calculada del modelo ajuste a la respuesta observada.

De la experiencia adquirida en más de 200 sondeos levantados en diferentes ambientes geológicos, se ha observado que la desviación estándar de los voltajes medidos comunmente es menor a 0.1% en los tiempos cortos, con un incremento gradual de la dispersión en los tiempos intermedios y largos. Los terrenos muy conductores representan la excepción a esta regla, pues sobre ellos las desviaciones estándar permanecen cercanas al valor de 0.1% en todos los tiempos. La Figura 2 presenta ejemplos típicos de los voltajes medidos y sus desviaciones estándar en tres sondeos levantados en diferentes zonas. El sondeo TV24, obtenido en una zona de resistividades moderadamente altas, muestra un aumento notable de la dispersión en tiempos intermedios y altos. En contraste, las desviaciones estándar de los datos del sondeo PT6 son bajas, producto de resistividades bajas en el subsuelo.

El método de convolución está compuesto por una serie secuencial de procesos numéricos, cada uno con un grado inherente de inexactitud. Para un aprovechamiento óptimo de las

ventajas que ofrecen los sondeos TDEM (Nabighian y Macnae, 1991; Spies y Frischknecht, 1991), es importante que la exactitud de la respuesta calculada sea mayor o igual que la incertidumbre asociada con las desviaciones estándar de los datos, por lo que resulta relevante identificar cuáles son los parámetros de cada proceso numérico que afectan la exactitud final de la respuesta calculada y evaluar sus contribuciones relativas. En este trabajo manejo una exactitud de 0.1% como nivel de referencia. Por otro lado, en principio es posible calcular respuestas prácticamente exactas. Sin embargo, ello se logra a expensas de la rapidez de cálculo. Entonces, es indispensable encontrar un equilibrio entre exactitud y tiempo de cómputo, dado que muchos de los algoritmos de inversión calculan el problema directo decenas o centenas de veces. El análisis de los parámetros de exactitud del método de convolución y la búsqueda de un equilibrio entre exactitud y tiempo de ejecución son los aspectos principales de este trabajo.

Otro aspecto numérico manejado aquí está relacionado con la exactitud de la respuesta en el arreglo de bobina no-central. El programa comercial Temixgl de la compañía Interpex, un paquete de cómputo interactivo de amplio uso en la interpretación de sondeos transitorios, calcula la respuesta del arreglo de bobina no-central aproximando el efecto de cada lado de la espira con un dipolo equivalente. Esta aproximación puede ser

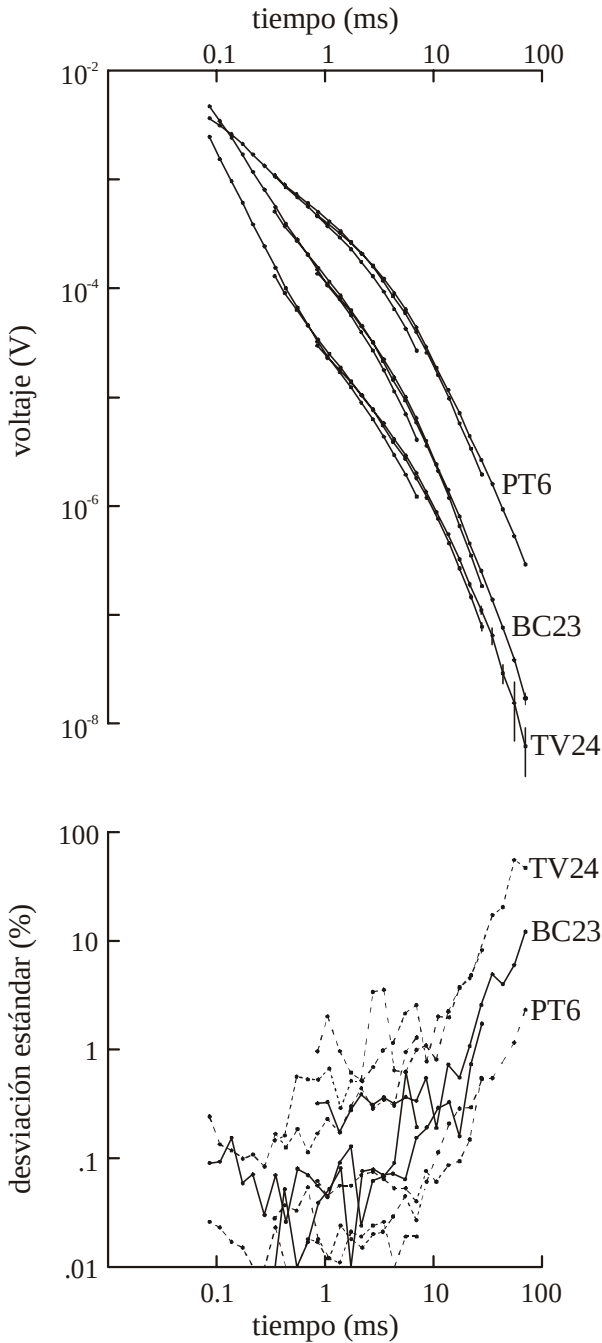


Figura 2. a) Voltajes transitorios en tres diferentes localidades. Se incluyen los valores de las tres frecuencias de repetición. Barras de error son $\pm$ una desviación estándar. Líneas continuas unen los voltajes de una misma frecuencia de repetición. b) Desviaciones estándar porcentuales de los voltajes.

malas cuando la bobina receptora se encuentra cerca de uno de los lados de la espira. En este trabajo se analizan las condiciones bajo las cuales se deteriora esta aproximación.

El artículo está estructurado de la siguiente forma: primero se presenta una síntesis del método de convolución, analizándose los diferentes factores de exactitud para el caso de una espira circular; en seguida se describe la integración asociada a espiras no-circulares y se discuten los errores ocasionados con

las aproximaciones del dipolo central y del dipolo equivalente; se finaliza con el estudio de otras tres fuentes que afectan la exactitud de las respuestas.

ESPIRA CIRCULAR

El procedimiento de cálculo del voltaje en el centro de una espira circular con el método de convolución se puede sintetizar en tres etapas secuenciales: transformada de Hankel, transformada inversa de Fourier y corrección de rampas. A continuación se hace una breve descripción de estas etapas.

Transformada de Hankel. En esta primera etapa se determina la componente vertical del campo magnético en el dominio de las frecuencias, expresada por la transformada de Hankel (Ryu *et al.*, 1970):

$$H_z(\omega) = \frac{Ia}{2} \int_0^{\infty} K(\lambda, \omega, \rho_j, e_j) J_1(\lambda a) d\lambda \quad (1)$$

donde I es la intensidad de la corriente continua en el transmisor antes del corte, a es el radio de la espira, λ es la variable de integración, K es el kernel de la transformada, ω es la frecuencia angular, ρ_j , e_j son las resistividades y espesores de las N capas del modelo y $J_1(\cdot)$ es la función Bessel de primer orden. El kernel de (1) está dado por (Wait, 1962)

$$K(\lambda, \omega, \rho_j, e_j) = \frac{2Y_0\lambda}{Y_0 + \hat{Y}_1} \quad (2)$$

donde $Y_0 = \lambda / (i\omega\mu_0)$ es la admitancia intrínseca del aire y $\hat{Y}_1$ es la admitancia superficial. Esta última se calcula iterativamente, empezando desde la última capa, con: $\hat{Y}_N = Y_N$,

$$\hat{Y}_n = Y_n \frac{(\hat{Y}_{n+1} + Y_n) + (\hat{Y}_{n+1} - Y_n) \exp(-2u_n e_n)}{(\hat{Y}_{n+1} + Y_n) - (\hat{Y}_{n+1} - Y_n) \exp(-2u_n e_n)} \quad (3)$$

$n = N-1, N-2, \dots, 1$

donde $Y_n = u_n / i\omega\mu$, $u_n = (\lambda^2 + \gamma_n^2)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$,

siendo $\gamma_n = \sqrt{i\omega\mu/\rho_n}$ el número de onda o constante de propagación de la n -ésima capa. En esta formulación se ignoran las corrientes de desplazamiento y se supone que la permeabilidad magnética es la del espacio libre ($\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m).

Para evaluar numéricamente la integral (1) se usó la técnica de convolución o filtrado digital (Ghosh, 1971) en donde, mediante un cambio de variables, la transformada de Hankel se transforma en una integral de convolución, cuya versión discreta es

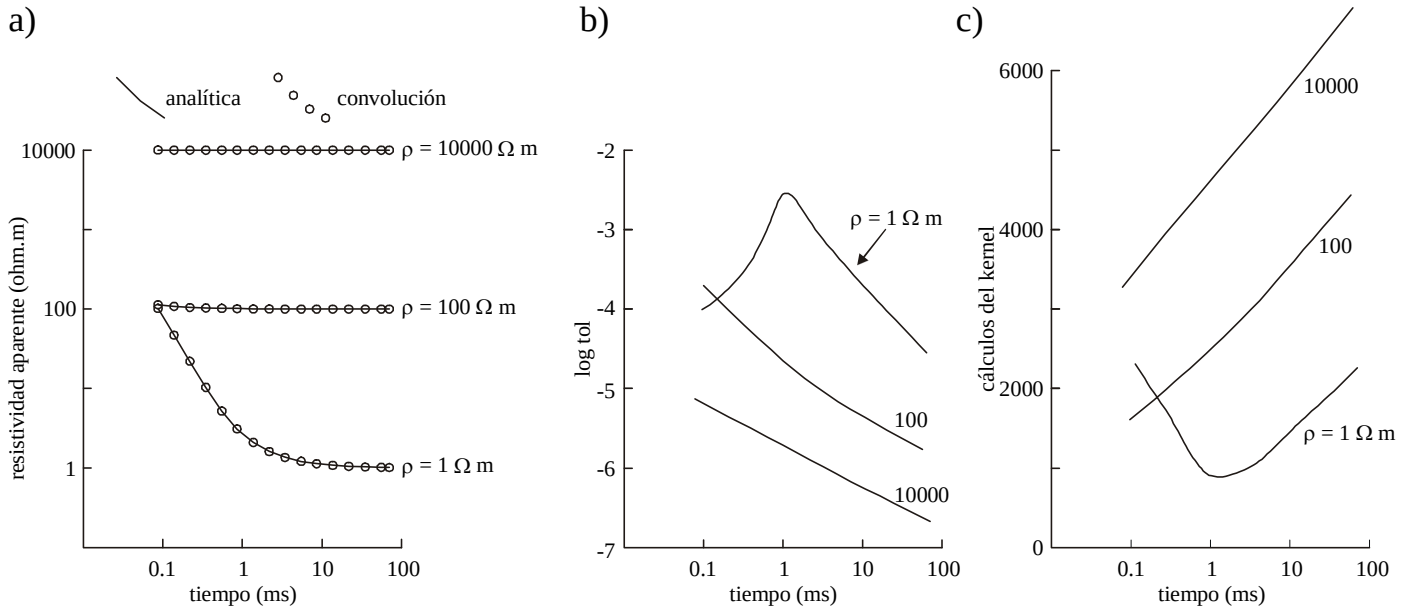


Figura 3. Comparación del método de convolución (sin corrección de rampas) con la solución analítica de un semiespacio homogéneo. Espira circular de 84.6 m de radio. Bobina receptora en el centro de la espira. a) Respuestas de resistividad aparente. b) Valores del factor de tolerancia (tol) de las convoluciones para obtener exactitudes de 0.1%. c) Número de veces que se calcula el kernel de la transformada de Hankel para obtener tal exactitud.

$$H_j = \sum_i K_{j-i} W_i \quad (4)$$

donde W_i son los coeficientes del filtro asociado a la función de Bessel y K representa al kernel discretizado. El filtro y la rutina de cálculo propuestos por Anderson (1979) fueron usados para realizar esta convolución. En este algoritmo la sumatoria en (4) es truncada cuando uno de los productos $K_{j-i} W_i$ es menor que el producto máximo multiplicado por un valor de tolerancia (tol) definido de antemano por el usuario. Esta tolerancia dicta el grado de exactitud requerido. Adelante se discutirá más sobre el efecto de esta tolerancia en la exactitud final de la respuesta.

Transformada de Fourier. El segundo paso lo constituye la transformación de $H_z(\omega)$ al dominio del tiempo para obtener el voltaje transitorio inducido en la bobina receptora. Esta operación está definida por una transformada inversa seno de Fourier de la parte imaginaria del campo magnético

$$v^e(t) = -\frac{2\mu A}{\pi} \int_0^\infty \text{Im}[H_z(\omega)] \sin(\omega t) d\omega \quad (5)$$

donde A es el área efectiva de la bobina receptora y v^e es la respuesta al escalón, es decir, el voltaje en el receptor cuando la corriente inyectada en la espira transmisora es un escalón teórico que se apaga instantáneamente en $t=0$.

Alternativamente, $v^e(t)$ se puede calcular como una transformada inversa coseno operando sobre la parte real de $H_z(\omega)$,

$$v^e(t) = \frac{2\mu A}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}[H_z(\omega)] \cos(\omega t) d\omega \quad (6)$$

En forma análoga al cálculo de la transformada de Hankel, las transformadas de Fourier (5) y (6) se evaluaron con una convolución usando los filtros publicados por Anderson (1975). En este trabajo opté por el empleo de la transformada inversa seno de Fourier, pues experimentos numéricos mostraron una mayor estabilidad de sus resultados en tiempos largos.

Corrección de rampas. La última etapa consiste en la incorporación de la corriente real del sistema Geonics. Esta corriente, caracterizada por ser periódica y tener apagados y encendidos en forma de rampas lineales de ancho t_r , difiere de la corriente teórica, que es aperiódica y con apagado instantáneo (Figura 4a). El voltaje calculado con (5) corresponde a esta corriente teórica.

Fitterman y Anderson (1987) demostraron que el efecto en $v^e(t)$ de la corriente trapezoidal es la suma de los efectos de todas las rampas anteriores al tiempo cero,

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(v^e(t)) \quad (7)$$

donde P_i es un promedio de $v^e(t)$ en una ventana de ancho t_r , dado por la integral

$$P_i(v^e(t)) = \frac{1}{t_r} \int_{t_a}^{t_a+t_r} v^e(\tau) d\tau \quad (8)$$

Puesto que la variación de v^e es suave con el tiempo, esta integral fue evaluada con el método de Simpson de cinco puntos.

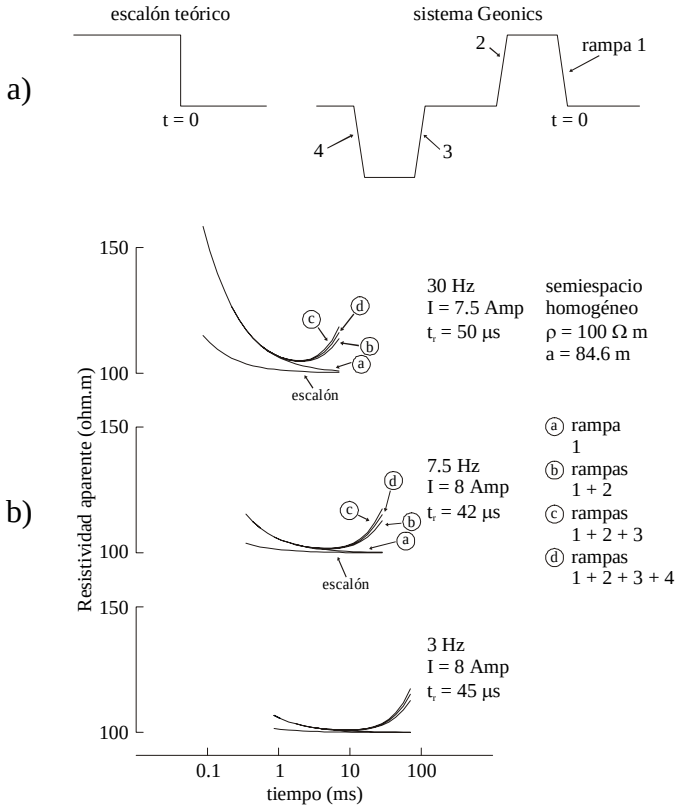


Figura 4. Efecto de la corrección de rampas. a) Escalón teórico de corriente y corriente real del sistema Geonics. b) Efecto en la resistividad aparente de la aplicación secuencial de la corrección de cuatro rampas.

Para clarificar el funcionamiento de esta corrección, consideremos que el voltaje se corrige sólo por las cuatro rampas de la Figura 4a, obteniéndose, de (7) y (8),

$$v(t) \approx \sum_{i=1}^4 P_i(v^e(t))$$

$$= \frac{1}{t_r} \left[\int_a^{a+t_r} v^e(\tau) d\tau - \int_b^{b+t_r} v^e(\tau) d\tau - \int_c^{c+t_r} v^e(\tau) d\tau + \int_d^{d+t_r} v^e(\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

$$\text{con } a = t, \quad b = t + \frac{T}{4} - t_r, \quad c = t + \frac{T}{2}, \quad d = t + \frac{3T}{4} - t_r,$$

donde T es el período de la corriente y t_r es el ancho de cada rampa. La primera integral corresponde a la corrección por la rampa 1, mientras que la última es la corrección por la rampa 4. Consideremos ahora un caso hipotético sencillo donde el período (T) es 400 ms, el ancho de las rampas (t_r) es 100 microsegundos (μs) y el voltaje de la corriente teórica es evaluado con las transformadas de Hankel y Fourier en 20 tiempos ($t = 1, 1.2, \dots, 100$ ms). Supongamos que se desea corregir el voltaje en $t = 1$ ms. Sustituyendo en (9), obtenemos:

$$v(1) = \frac{1}{0.1} \left[\int_1^{1.1} v^e(\tau) d\tau - \int_{100.9}^{101} v^e(\tau) d\tau - \int_{201}^{201.1} v^e(\tau) d\tau + \int_{300.9}^{301} v^e(\tau) d\tau \right]. \quad (10)$$

Esta expresión nos permite discutir dos procesos de rapidez computacional. La evaluación numérica de la primera integral con la regla de Simpson de cinco puntos requiere conocer, además del voltaje v^e en 1 ms, los voltajes en 4 tiempos adicionales (1.025, 1.05, 1.075 y 1.1 ms). Una opción, que aumenta considerablemente el tiempo de cómputo, consiste en calcularlos con la aplicación directa de las expresiones (1) y (5) o, alternativamente, estimarlos con algún esquema de interpolación basado en los 20 voltajes ya calculados. Esta última opción fue adoptada en este trabajo con el empleo de polinomios cúbicos de interpolación. Asimismo, nótese que para evaluar las tres últimas integrales de (10) es necesario conocer 15 voltajes en tiempos mayores a 100 ms. Estos voltajes podrían calcularse directamente con las transformadas de Hankel y Fourier de (1) y (5), pero esto aumentaría notablemente el tiempo de ejecución. Para evitar este problema, se adoptó el método propuesto por Levy (1984), que supone que el voltaje en los tiempos largos se comporta como el producido por un semiespacio homogéneo. La expresión asintótica para tiempos largos del voltaje en el centro de una espira circular situada sobre un subsuelo homogéneo es (Kaufman, 1979)

$$v^e(t) \rightarrow \frac{I A a^2}{20} \sqrt{\frac{\mu^5}{\pi \rho^3}} t^{-5/2} \quad \text{para } t \rightarrow \infty \quad (11)$$

Al graficar el logaritmo del voltaje en función del logaritmo del tiempo esta expresión se transforma en una recta de pendiente -2.5 . Para determinar, entonces, todos los voltajes requeridos por (10) en tiempos mayores a 100 ms (70.3 ms para el caso real del sistema Geonics), se empleó como función de extrapolación una recta de pendiente -2.5 en el espacio log-log, estimándose su ordenada al origen a partir de un ajuste de mínimos cuadrados con los tres voltajes ya calculados en los tiempos más largos. Esta función de extrapolación permite estimar el voltaje para cualquier tiempo mayor a 70.3 ms.

Finalmente, aunque el voltaje en función del tiempo puede usarse como la respuesta del subsuelo, el formato más común de presentación de resultados es el de una función de resistividad aparente, que para el caso de sondeos transitorios es una resistividad aparente tardía, definida por (Kaufman y Keller, 1983)

$$\rho_a = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{m A}{20 v} \right)^2 \left(\frac{\mu_0}{t} \right)^5 \right]^{1/3}, \quad (12)$$

donde m es el momento de la espira transmisora (corriente por área).

COMPARACIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA

Como una primera evaluación del método de convolución, en la Figura 3a se comparan sus resultados con los de la solución analítica para un semiespacio homogéneo de resistividad variable (1, 100 y 10,000 $\Omega \cdot m$). Con el fin de analizar en forma aislada la exactitud de las dos convoluciones asociadas con las transformadas de Hankel y Fourier, las respuestas comparadas no incluyen la corrección de rampas. La solución analítica del voltaje en el centro de una espira circular sobre un semiespacio homogéneo de resistividad ρ es (Kaufman, 1979)

$$v^e(t) = \frac{I A \rho}{a^3} \left[3 \operatorname{erf}(\beta) - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} (3 + 2\beta^2) \exp(-\beta^2) \right], \quad (13)$$

donde $\beta = a \sqrt{\mu/4\rho} t$ es el número de inducción y

$\operatorname{erf}(\beta) = \left(2/\sqrt{\pi} \right) \int_0^\beta \exp(-z^2) dz$ es la función error. Para eva-

luar numéricamente la función error se emplearon su expansión en serie así como sus aproximaciones asintóticas para argumentos pequeños y grandes (Abramowitz y Stegun, 1972). Como se puede observar en la Figura 3a, la comparación entre las respuestas calculadas de resistividad aparente para las tres diferentes resistividades del semiespacio es buena, verificando así que ambas convoluciones están trabajando satisfactoriamente.

Como se mencionó arriba, la exactitud de las convoluciones está determinada por el factor de tolerancia (tol). La convolución más exacta es obtenida con $tol = 0$; para este caso se usan todos los coeficientes de los filtros de Anderson (287 y 266 coeficientes para Hankel y Fourier, respectivamente). Sin embargo, puesto que para conocer el voltaje con (5) es necesario primero determinar $H_z(\omega)$ con (1), el uso de $tol = 0$ implica calcular, para cada tiempo, más de 76,000 veces el kernel K de la transformada de Hankel, lo que incrementa considerablemente el tiempo de ejecución. Es clara, entonces, la necesidad de encontrar un equilibrio entre exactitud y rapidez de cómputo. La Figura 3b muestra los valores de tol requeridos para obtener exactitudes de 0.1 % en las resistividades aparentes de los tres semiespacios y la Figura 3c el correspondiente número de veces que fue necesario calcular el kernel de Hankel. El ahorro en el tiempo de cómputo es obvio al comparar estos números (de 1,000 a 7,000, Figura 3c) con el de 76,000 para $tol=0$. Dos rasgos adicionales, relevantes para la eficiencia del problema directo, se pueden observar en las curvas de tolerancia de la Figura 3b. Primero, los medios resistivos requieren de tolerancias menores que los medios conductores, y por lo tanto, de un mayor número de cálculos del kernel de Hankel. Segundo, los tiempos largos necesitan de tolerancias menores que los tiempos cortos. El comportamiento aparentemente anómalo de la curva de tolerancias del semiespacio de 1 $\Omega \cdot m$, que podría interpretarse como una violación a esta segunda conclusión, tiene una explicación simple. El máximo de esta curva corresponde

a un número de inducción cercano a la unidad. Los filtros de Anderson fueron diseñados de tal forma que en este rango del número de inducción el número de términos de la convolución es mínimo.

CORRECCIÓN DE RAMPAS

La Figura 4 ilustra el efecto de la corrección de rampas en las resistividades aparentes de un semiespacio homogéneo al compararlas con la respuesta al escalón. La curva marcada como “escalón” en esta figura fué calculada con $v^e(t)$ de la expresión (5), es decir, sin la aplicación de ninguna corrección de rampa, mientras que las curvas denotadas con a , b , c y d corresponden, respectivamente, a la aplicación secuencial de la corrección de las rampas 1, 2, 3 y 4 de la Figura 4a con la expresión (8). Estas curvas (Figura 4b) demuestran la importancia de corregir la respuesta al escalón por el efecto de la corriente real. Las correcciones que modifican más a la respuesta al escalón son las de las rampas 1 y 2, es decir, las más próximas al tiempo cero. La corrección de la rampa 1 (curva a) incrementa todas las resistividades aparentes, afectando más intensamente a los tiempos cortos. Un efecto similar es observado en la corrección de la rampa 2 (curva b), pero en este caso la influencia es más notable en los tiempos largos. Los efectos de las otras dos rampas (c y d) solo influyen a los tiempos largos, además de que su efecto disminuye conforme la rampa se encuentra más alejada del tiempo cero.

Para evaluar la exactitud de la corrección de rampas es necesario un método independiente que no esté basado en la suposición de que los voltajes de tiempos largos decaen como una recta de pendiente -2.5 en el espacio log-log. El método de la Serie de Fourier, que se resume a continuación, representa un camino alternativo para el cálculo de la respuesta transitoria.

Método de la Serie de Fourier. La secuencia de operaciones de este método es la siguiente: primero se calculan los coeficientes de Fourier (a_n, b_n) de la corriente en la espira transmisora y se multiplican por la componente vertical del campo magnético $H_z(w_n)$. Estos últimos coeficientes son evaluados con la expresión (1) de la transformada de Hankel. En seguida se evalúa la respuesta transitoria del campo magnético $h_z(t)$ transformando el producto anterior al dominio del tiempo por medio de una suma finita de armónicos. Finalmente se calcula el voltaje inducido en la bobina receptora por medio de la derivada numérica de $h_z(t)$. La resistividad aparente tardía se obtiene por medio de la expresión (12). Este proceso se sintetiza matemáticamente como (Verma y Rai, 1982)

$$h_z(t) \equiv \sum_{n=1,3,\Lambda}^N s_n [\operatorname{Re}(c_n) \cos(\omega_n t) - \operatorname{Im}(c_n) \operatorname{sen}(\omega_n t)] \quad (14)$$

con $c_n = (a_n - i b_n) H_z(\omega_n)$, $\omega_n = 2\pi n/T$,

$$\text{y } v(t) = -\mu A \frac{\partial h_z(t)}{\partial t} \quad (15)$$

En la expresión (14) c_n representa el producto de los coeficientes de Fourier de la corriente por los del campo magnético; $s_n = \text{sen}(n\pi/N)/(n\pi/N)$ son los coeficientes de Lanczos (Papoulis, 1962), útiles para acelerar la convergencia de la sumatoria puesto que se comportan como un filtro pasa-bajas y N es el número de armónicos usados en la suma. Los coeficientes de Fourier de la corriente $I(t)$ se obtienen de

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \cos(\omega_n t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \text{sen}(\omega_n t) dt. \quad (16)$$

Con la forma de onda de la corriente transmitida por el sistema Geonics (Figura 4a) las integrales (16) pueden resolverse analíticamente, resultando en

$$a_0 = 0, \quad a_n = b_n = 0 \text{ para } n \text{ par}$$

$$a_n = d_n [\cos(\varepsilon_n) + \text{sen}(\varepsilon_n) - 1], \quad b_n = -a_n \text{ para } n = 1, 5, 9, 13, \dots$$

$$a_n = d_n [\cos(\varepsilon_n) - \text{sen}(\varepsilon_n) - 1], \quad b_n = -a_n \text{ para } n = 3, 7, 11, 15, \dots$$

$$\text{donde } d_n = \frac{IT}{n^2 \pi^2 t_r}, \quad \varepsilon_n = \frac{2\pi n t_r}{T}.$$

Existen dos diferencias importantes entre los métodos de convolución y de la Serie de Fourier. En este último no es necesario corregir por las rampas pues la forma de onda $I(t)$ que se usa para calcular los coeficientes de Fourier (16) ya las incluye. La segunda diferencia reside en la manera de determinar el voltaje. En el método de convolución el voltaje se obtiene directamente de la transformada inversa de Fourier (5), mientras que en el de la Serie de Fourier el voltaje se obtiene derivando $h_z(t)$. La derivada de (14) puede realizarse en forma analítica o numérica. Con el procedimiento descrito en el Apéndice A la derivación numérica resulta más eficiente para un mismo número de armónicos. De cualquier forma, la operación de diferenciación limita la eficiencia del método de la Serie de Fourier, pues $h_z(t)$ es una función con ruido oscilatorio, que es amplificado al calcular la derivada.

En la Figura 5 se demuestra que la corrección de rampas trabaja satisfactoriamente para un subsuelo homogéneo. La misma figura incluye un breve análisis de convergencia del método de la Serie de Fourier. Todas las resistividades aparentes fueron obtenidas con una espira circular de 84.6 m de radio sobre un semiespacio homogéneo de resistividad $100 \Omega \cdot \text{m}$, usando corrientes (8 Amp) y anchos de rampa ($50 \mu\text{s}$) típicamente observados en levantamientos de campo y un valor de tol de 1×10^{-8} . El área de esta espira es igual al área de una espira de $150 \times 150 \text{ m}$. Por claridad, en la Figura 5a solo se muestran los resultados de las frecuencias de repetición de 30 y 3 Hz. Por medio de un incremento gradual del número de armónicos se determinó que con 20,000 armónicos ya se presenta convergen-

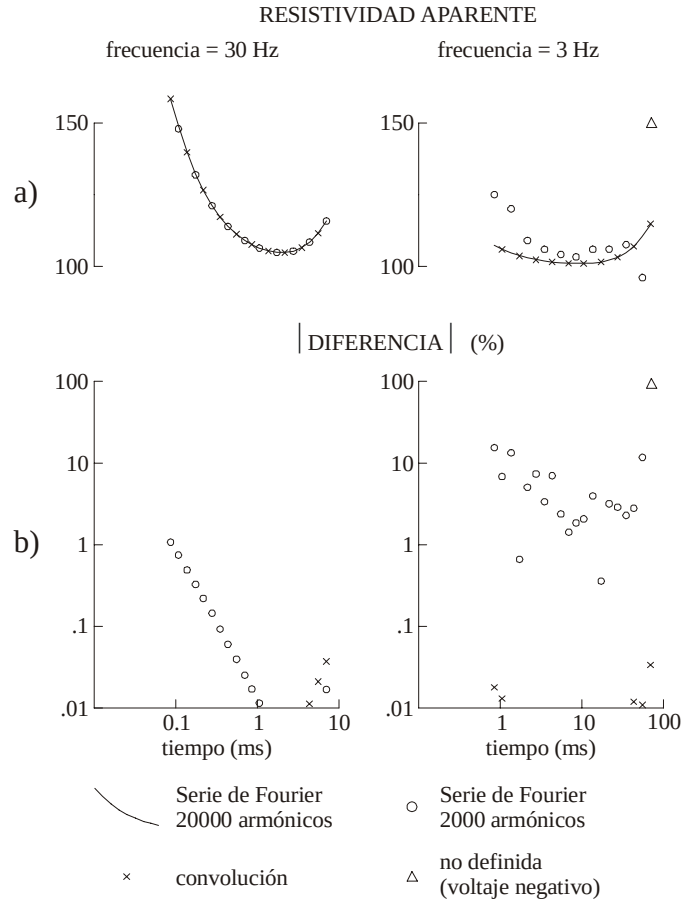


Figura 5. Comparación de respuestas calculadas con convolución y serie de Fourier. a) Resistividades aparentes con las frecuencias de repetición 30 y 3 Hz. Convolución (cruces), serie de Fourier con 2,000 armónicos (círculos) y 20,000 armónicos (líneas continuas). b) Valores absolutos de los errores (en porcentaje) de convolución y de la serie de Fourier con 2,000 armónicos, ambas referidas a los resultados de la serie de Fourier con 20,000 armónicos. El triángulo denota una resistividad aparente indefinida debido a un voltaje negativo.

cia en las respuestas con errores menores al 0.1 %. La Figura 5b presenta los valores absolutos de las diferencias porcentuales obtenidas con el método de convolución (cruces) y con 2,000 armónicos en la Serie de Fourier (círculos), comparando ambos casos con el de la Serie de Fourier de 20,000 armónicos.

Las diferencias del método de convolución son menores a 0.04%, lo que confirma que la corrección de rampas trabaja satisfactoriamente para un semiespacio homogéneo. Los tiempos de ejecución en una estación de trabajo SUN IPX fueron de 16 s para el método de convolución y de 240 s para el de la Serie de Fourier (20,000 armónicos), lo que demuestra la mayor eficiencia computacional del primero.

Las diferencia entre las respuestas con 2,000 y 20,000 armónicos son significativamente mayores. Para la frecuencia de 30 Hz ellas alcanzan un valor de 1% en el tiempo más corto, con una clara disminución con el tiempo. En la frecuencia de 3 Hz casi todas las diferencias son mayores a 1%, alcanzándose un valor máximo de 15% en el tiempo más corto e incluso gene-

rando una resistividad aparente indefinida como resultado de un voltaje negativo en el tiempo más largo. Este comportamiento refleja la lenta convergencia del método de la Serie de Fourier.

Para evaluar la corrección de rampas en el caso de un subsuelo estratificado se seleccionó un modelo de dos capas. La primera capa es de resistividad constante ($100 \Omega \cdot \text{m}$) y espesor variable (Figura 6a). Para analizar los efectos de sustratos resistivos y conductores se consideraron dos resistividades de la segunda capa (1000 y $10 \Omega \cdot \text{m}$). Fueron usadas tres profundidades al sustrato: 460 , 1150 y 2890 m, equiespaciadas en escala logarítmica, ya que la profundidad de investigación de los sondeos transitorios es de índole logarítmica (Spies, 1989). La Figura 6b muestra los errores en las resistividades aparentes calculadas con el método de convolución y corregidas por rampas para cada uno de los seis modelos considerados (se grafican únicamente los errores mayores a 0.1%). Los “errores” se calculan considerando como “verdaderas” a las resistividades aparentes del método de la Serie de Fourier ($20,000$ armónicos). Todas las respuestas fueron calculadas con la misma fuente: corriente de 9 Amp, anchos de rampa de $50 \mu \text{s}$ y una espira circular de 84.6 m de radio.

En la Figura 6b se pueden observar los siguientes rasgos: los errores mayores a 0.1% solo se presentan en las resistividades aparentes de tiempos largos (> 10 ms); los errores son mayores para el caso del sustrato conductor, alcanzando hasta más de dos órdenes de magnitud por arriba del nivel de referencia de 0.1% ; los errores más grandes se obtienen cuando la profundidad al sustrato es de 1150 m. Esto indica que la corrección de rampas es una fuente importante de inexactitud, caracterizada por afectar sobre todo a las respuestas de tiempo largo y en forma más pronunciada cuando el sustrato es conductor.

La Figura 6c ayuda a entender el comportamiento de estos errores. En ella se muestran los voltajes correspondientes a la respuesta al escalón para los seis modelos. También se dibujan las respectivas rectas extrapoladas para tiempos largos. Como se describió anteriormente, estas rectas son usadas para estimar los voltajes en tiempos mayores a 70 ms, que corresponden a la ventana del tiempo más largo del sistema Geonics. Las pendientes de estas rectas son de -2.5 ; sus ordenadas al origen fueron estimadas ajustando por mínimos cuadrados los voltajes de los tres últimos tiempos (en este caso particular, de 70 , 86 y 106 ms). En consecuencia, la exactitud de la corrección de rampas es óptima cuando estos voltajes de tiempo largo ya se encuentran en la porción lineal de pendiente -2.5 . De los seis modelos manejados, el más exacto corresponde al del sustrato resistivo en 2890 m que, como se puede notar de la Figura 6c, presenta el mejor ajuste de la recta de extrapolación. En contraste, la corrección menos exacta es la del sustrato conductor en 1150 m, producida por voltajes tardíos que todavía no se encuentran en la etapa de comportamiento lineal. Los modelos con sustrato conductor presentan mayores errores porque los métodos electromagnéticos de exploración son más sensibles a medios conductores, por lo que la recta que representa a un medio homogéneo no se parece mucho a la respuesta del modelo de

capas. Adicionalmente, no es fortuito el hecho de que los errores sean máximos cuando la profundidad al sustrato es de 1150 m. Spies (1989) demostró que la profundidad máxima de investigación de los sondeos transitorios de bobina central se puede estimar de

$$D_{\max} \approx 1.38 \left(\frac{m \rho_p}{\eta} \right)^{1/5},$$

donde m es el momento de la fuente (corriente por área de la espira), ρ_p es la resistividad promedio del subsuelo y η es el voltaje del nivel de ruido electromagnético ambiental. Considerando un valor de $100 \Omega \cdot \text{m}$ para la resistividad promedio, el momento de la fuente de este experimento ($2.025 \times 10^5 \text{ Amp} \cdot \text{m}^2$) y el valor típico del ruido ($5 \times 10^{-8} \text{ V}$) sugerido por Spies (1989), la profundidad máxima de investigación es de 1150 m. Entonces, los errores son máximos para esta profundidad al sustrato porque los voltajes de tiempo largo están respondiendo al contraste de resistividad en esta profundidad.

ESPIRA RECTANGULAR

Hasta ahora se ha analizado el caso de una espira circular. Este tipo de fuente es útil en análisis teóricos porque su simetría azimutal facilita llegar a la solución del problema directo. Sin embargo, su aplicación práctica está limitada por la dificultad en tender una espira circular en el campo. Espiras con geometría cuadrada o rectangular son las que se emplean rutinariamente en los levantamientos de campo. El cálculo del voltaje transitorio inducido por una espira rectangular requiere de una integración a lo largo del alambre que forma la espira, es decir, de una operación adicional a los tres procesos numéricos descritos con anterioridad para la espira circular.

Consideremos la espira rectangular de la Figura 7a, donde se muestra el sistema coordenado empleado y la posición de una bobina receptora horizontal en el punto arbitrario $P(x, y)$. Se puede demostrar (Flores, 1999) que, por medio del principio de reciprocidad (Poddar, 1982), el campo total $H_z(\omega)$ en P producido por la espira de dimensiones $2X$ por $2Y$ es la suma de los campos debidos a los cuatro lados de la espira,

$$H_z(\omega) = H_z^A(\omega) + H_z^B(\omega) + H_z^C(\omega) + H_z^D(\omega) \quad (17)$$

$$\text{donde } H_z^A(\omega) = \frac{(Y - y)I}{4\pi}$$

$$\int_{-X}^X \frac{1}{R_A} \left[\int_0^\infty K^{DMV}(\lambda, \omega, \rho_j, e_j) J_1(\lambda R_A) d\lambda \right] dx' \quad (18)$$

$$y R_A = \left[(x - x')^2 + (y - Y)^2 \right]^{1/2},$$

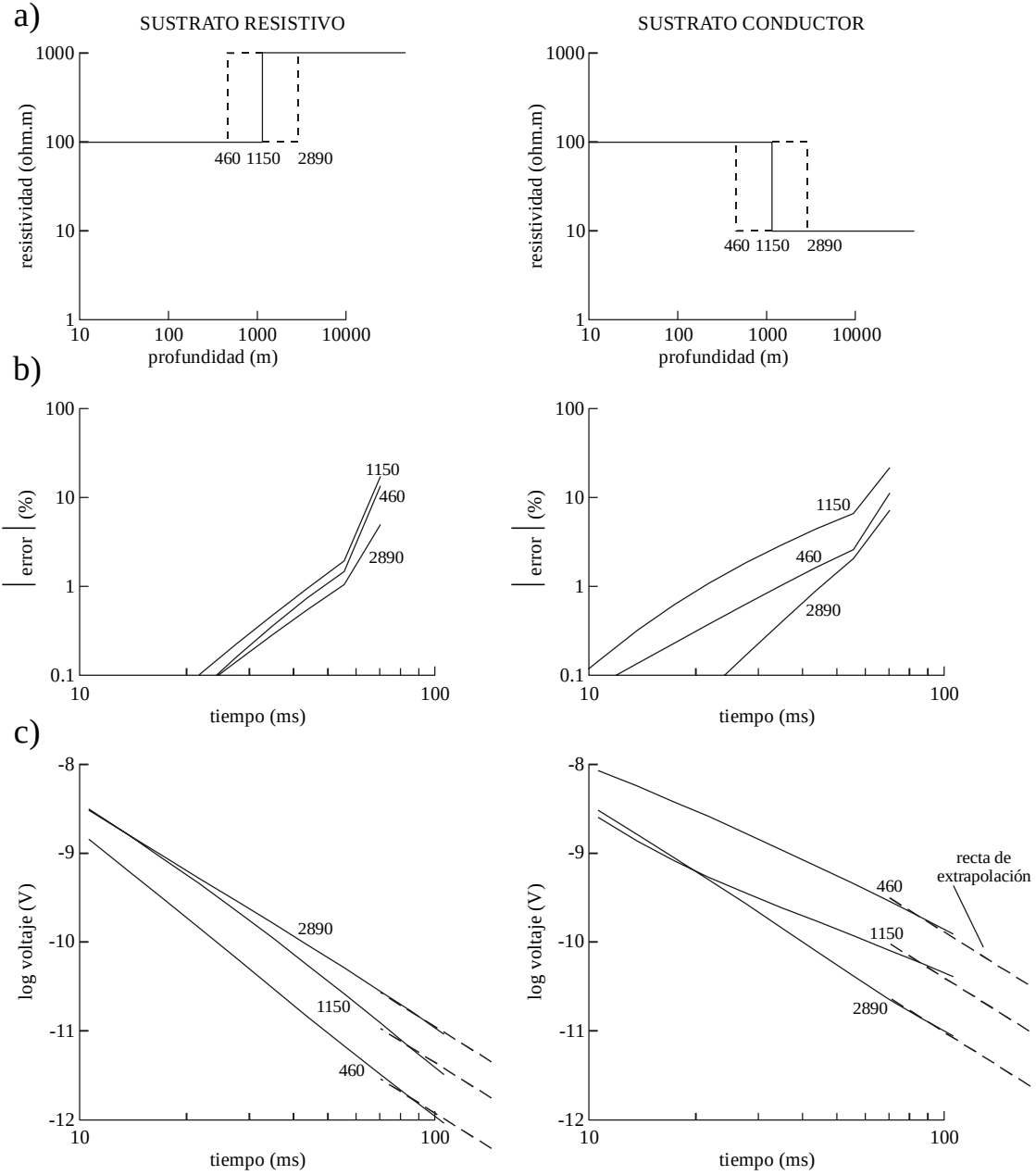


Figura 6. Evaluación de la corrección de rampas para un subsuelo estratificado. a) Modelos de dos capas con sustratos resistivo y conductor. Profundidades al sustrato de 460, 1150 y 2890 m. b) Valores absolutos de los errores en las resistividades aparentes del método de convolución respecto a los de la serie de Fourier con 20,000 armónicos. c) Voltajes al escalón y rectas de extrapolación.

con expresiones similares para las contribuciones de los otros tres lados. La integral con respecto a λ es una transformada de Hankel que se evalúa mediante convolución. El kernel de la transformada (K^{DM}) corresponde al de un dipolo magnético vertical que se calcula con las mismas expresiones (2) y (3) del kernel de la espira circular.

La integral con respecto a x' , un punto sobre el lado A de la espira (Figura 7b), es calculada con el método de Gauss-Legendre. Si abreviamos (18) como

$$H_z^A(\omega) = c \int_{-X}^X f(x') dx'$$

con $c = (Y - y) I / 4 \pi$ y $f(x')$ todo el integrando, la integral con Gauss-Legendre es aproximada con

$$H_z^A(\omega) \approx c \sum_{m=1}^M A_m f(x'_m), \quad (19)$$

donde A_m son coeficientes generados por

$$A_m = \frac{2(1 - x'^2_m)}{M^2 [P_{M-1}(x'_m)]^2},$$

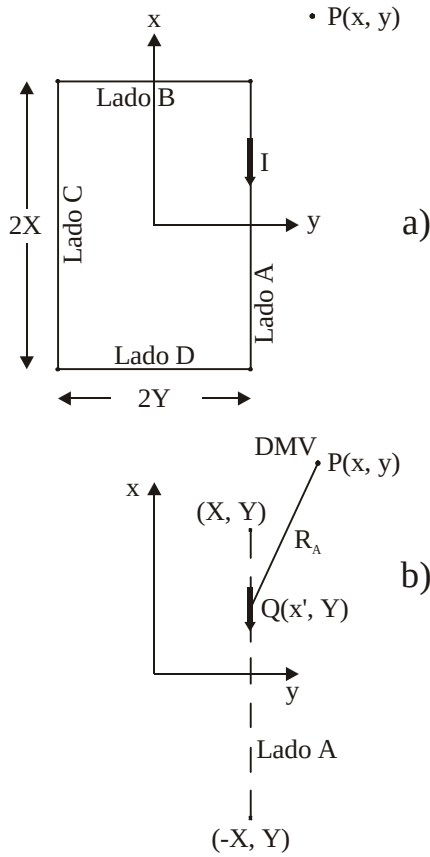


Figura 7. a) Espira rectangular y sistema coordenado empleado. b) Integración del campo a lo largo del bipolo eléctrico que forma uno de los lados de la espira.

donde $P_{M-1}(x')$ es el polinomio de Legendre de orden $M - 1$ y x'_m son las raíces del polinomio de Legendre de orden M (Davies y Polonsky, 1972).

Es importante notar que con una espira rectangular el tiempo de cómputo aumenta considerablemente respecto al de una espira circular porque en cada evaluación de $f(x'_m)$ en (19) es necesario resolver la transformada de Hankel, debido a que en el argumento de la función de Bessel en (18) la distancia R_A depende de x' . Este aumento en el tiempo de ejecución puede mitigarse parcialmente con el uso de varias propiedades de simetría. Por ejemplo, una de ellas se presenta en el caso de una bobina receptora colocada en el centro de una espira cuadrada, donde el campo total es simplemente cuatro veces el campo producido por uno de los lados.

Cuando la geometría de la fuente es una espira no-circular, el valor de M en (19) surge como un nuevo parámetro que afecta la exactitud de la respuesta. Intuitivamente, es de esperarse que cuando el receptor se encuentra cerca de un lado de la espira, este lado requerirá de una integración más fina que la requerida para los lados más alejados. La Figura 8 sirve para demostrar que la respuesta converge al aumentar M . En este experimento se calculó $\text{Im}[H_z(\omega)]$ en cuatro posiciones diferentes de la bobina receptora (Figura 8a), localizadas a lo largo de un perfil perpendicular al lado A de una espira cuadrada de 150 m

de lado sobre un semiespacio homogéneo de $100 \Omega \cdot \text{m}$. Las respuestas fueron calculadas en dos frecuencias (1.8 y 1.1×10^7 Hz) representativas de los fenómenos de muy baja y muy alta frecuencia (Spies y Frischknecht, 1991), con números de inducción asociados de 0.02 y 50, respectivamente, usando un número variable de puntos de integración ($M = 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15$ y 20). La Figura 8b muestra los valores absolutos de los errores en $\text{Im}[H_z(\omega)]$ en los cuatro receptores para las dos frecuencias seleccionadas. Para estimar los errores se consideraron los resultados calculados con $M = 20$, donde las respuestas prácticamente ya convergieron.

Varios rasgos importantes se pueden deducir de las curvas de la Figura 8b. Los receptores más cercanos al lado A necesitan valores más altos de M para alcanzar el mismo nivel de exactitud. En forma análoga, en la frecuencia alta se necesitan valores mayores de M que para la frecuencia baja. Puesto que el voltaje transitorio está relacionado con la respuesta de la Figura 8 a través de la transformada inversa de Fourier, es de esperarse, entonces, que los voltajes en tiempos cortos requieran de más puntos de integración que los de tiempos largos. Finalmente, en los receptores cercanos al lado A, este lado contribuye más al campo total que el lado C. Este comportamiento es usado en los programas de cómputo por medio de diferentes valores de M para cada uno de los lados, evitando así realizar cálculos innecesarios en los lados de la espira más alejados del receptor.

APROXIMACIÓN CON UNA ESPIRA CIRCULAR

En la interpretación de sondeos realizados con una espira cuadrada y un receptor central es práctica común aproximar la espira con una circular de misma área (por ejemplo, Raiche y Spies, 1981). Para examinar la validez de esta aproximación, la Figura 9 muestra los errores porcentuales entre los voltajes calculados con una espira circular de 84.6 m de radio con respecto a una cuadrada de 150 m de lado para dos semiespacios homogéneos de diferente resistividad (1 y $100 \Omega \cdot \text{m}$). Todas las respuestas de la espira cuadrada fueron calculadas integrando cada lado de la espira con $M=20$ para asegurar su convergencia. Solo se presentan las diferencias mayores a 0.1 %. Los mayores errores se presentan en los tiempos cortos y los valores más grandes (de hasta 7 %) ocurren con el semiespacio más conductor de $1 \Omega \cdot \text{m}$. En relación a los tiempos de cómputo, el cálculo de las respuestas con la espira circular es al menos 11 veces más rápido que con la espira cuadrada. Entonces, la decisión de usar una espira circular de área equivalente depende de un compromiso entre rapidez de ejecución y exactitud, tomando en cuenta que la exactitud es menor para los tiempos más cortos y en medios conductores.

APROXIMACIÓN CON UN DIPOLO CENTRAL

Cuando el receptor no se encuentra en el centro de la espira, en principio resulta atractiva la idea de aproximar cada lado de la espira con un dipolo de corriente localizado en el centro de cada lado. Si esta aproximación es válida se evita realizar la

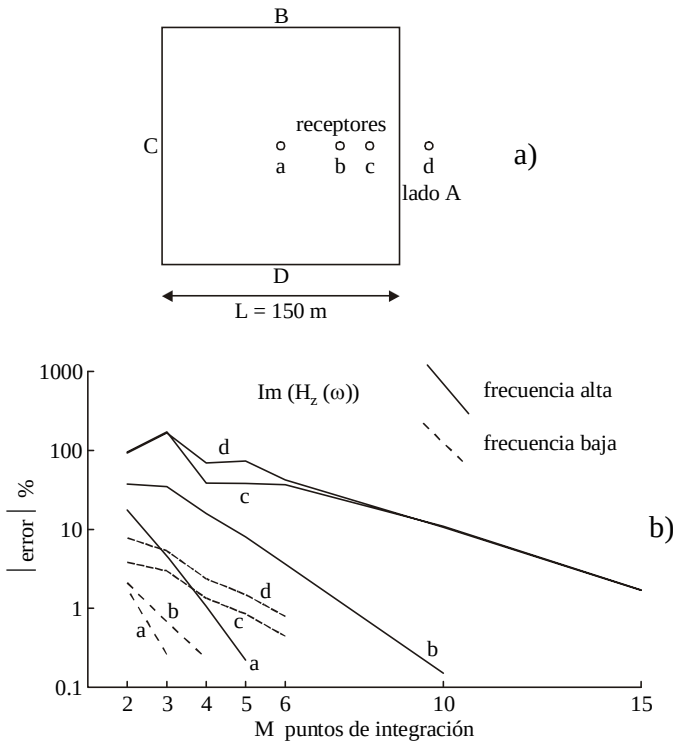


Figura 8. Análisis en el dominio de las frecuencias de la convergencia de la integración numérica con el número de puntos de integración. a) Posición de los cuatro receptores (a, b, c y d) respecto a una espira cuadrada de 150 m de lado. b) Disminución del error en la parte imaginaria de la componente vertical del campo magnético en función del número de puntos de integración (M) en cada uno de los receptores. Análisis en las frecuencias 1.8 Hz y 1.1×10^7 Hz, representando el comportamiento de baja y alta frecuencia.

integración y por consiguiente se ahorrará en tiempo de ejecución. Por otro lado, del análisis de las Figuras 8 y 9 se dedujo que los parámetros que afectan la exactitud de la integración de los lados de la espira son la distancia entre el receptor y el lado de la espira, la resistividad del subsuelo y el tiempo. La Figura 10 atiende a estos dos conceptos al combinar estos tres parámetros de exactitud en una sola gráfica que muestra los errores cometidos al aproximar la respuesta de un alambre de longitud finita (bipolo) con un dipolo central. Los dos ejes coordenados de la figura son adimensionales. El eje de las ordenadas (R/L) representa la posición relativa del receptor Rx respecto a la longitud del bipolo. La resistividad del semiespacio y el tiempo son considerados en el eje de las abscisas con δ_t/L , donde δ_t es la longitud de difusión $\sqrt{2\rho t/\mu}$, que es la profundidad en la cual el campo eléctrico es máximo para un tiempo dado t (Nabighian y Macnae, 1991). La longitud de difusión es un concepto análogo a la profundidad de membrana (skin depth) del dominio de las frecuencias. Para una fuente puntual, la longitud de difusión puede visualizarse como el radio de influencia de la fuente, de tal manera que δ_t/L expresa qué tan grande es este radio de influencia respecto a la longitud del bipolo. Adicionalmente, en la parte inferior de la figura se muestran los rangos de δ_t/L cubiertos por el sistema TEM57 para tres resistividades nominales de 1, 10 y $100 \Omega \cdot \text{m}$.

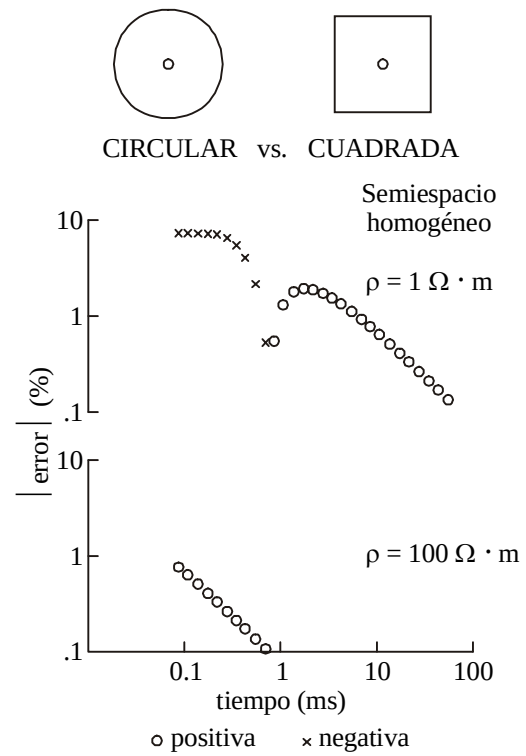


Figura 9. Aproximación de una espira cuadrada con una circular de misma área. Receptor en el centro. Valores absolutos de los errores (en porcentaje) de las resistividades aparentes de la espira circular respecto a la cuadrada calculada con 20 puntos de integración. Círculos y cruces denotan errores positivos y negativos, respectivamente.

Los contornos de la Figura 10 representan errores porcentuales calculados con

$$\frac{v^{DIP} - v^{BIP}}{v^{BIP}} \times 100\%,$$

donde v^{BIP} es el voltaje transitorio de un bipolo de longitud L por donde fluye una corriente de intensidad I que se apaga en forma instantánea (escalón), calculado en un punto Rx localizado una distancia R sobre la bisectriz del bipolo. Este voltaje fue calculado con 20 puntos de integración Gauss-Legendre. El voltaje v^{DIP} fue calculado con un dipolo de momento $L I$ colocado en el centro del bipolo. La morfología de los contornos de error muestran que la aproximación con un dipolo central produce errores mayores al 1% cuando $R/L < 5$ y $\delta_t/L < 2$, es decir, cuando el producto de resistividad por tiempo es menor a $8\pi \times 10^{-7} L^2$. Para dejar más clara la aplicación de esta gráfica consideremos un semiespacio de $1 \Omega \cdot \text{m}$ sobre el que se encuentra una espira cuadrada con receptor central. Para este caso la relación R/L es 0.5 ($R=75 \text{ m}$, $L=150 \text{ m}$). Si deseáramos aproximar la respuesta de un lado de la espira con un dipolo colocado en su centro, se cometería un error de 70 % en el tiempo de $87 \mu\text{s}$ (punto a de la Figura 10) y de 0.26 % en 70 ms (punto b). Estos errores decrecen si la resistividad del subsuelo aumenta. Este

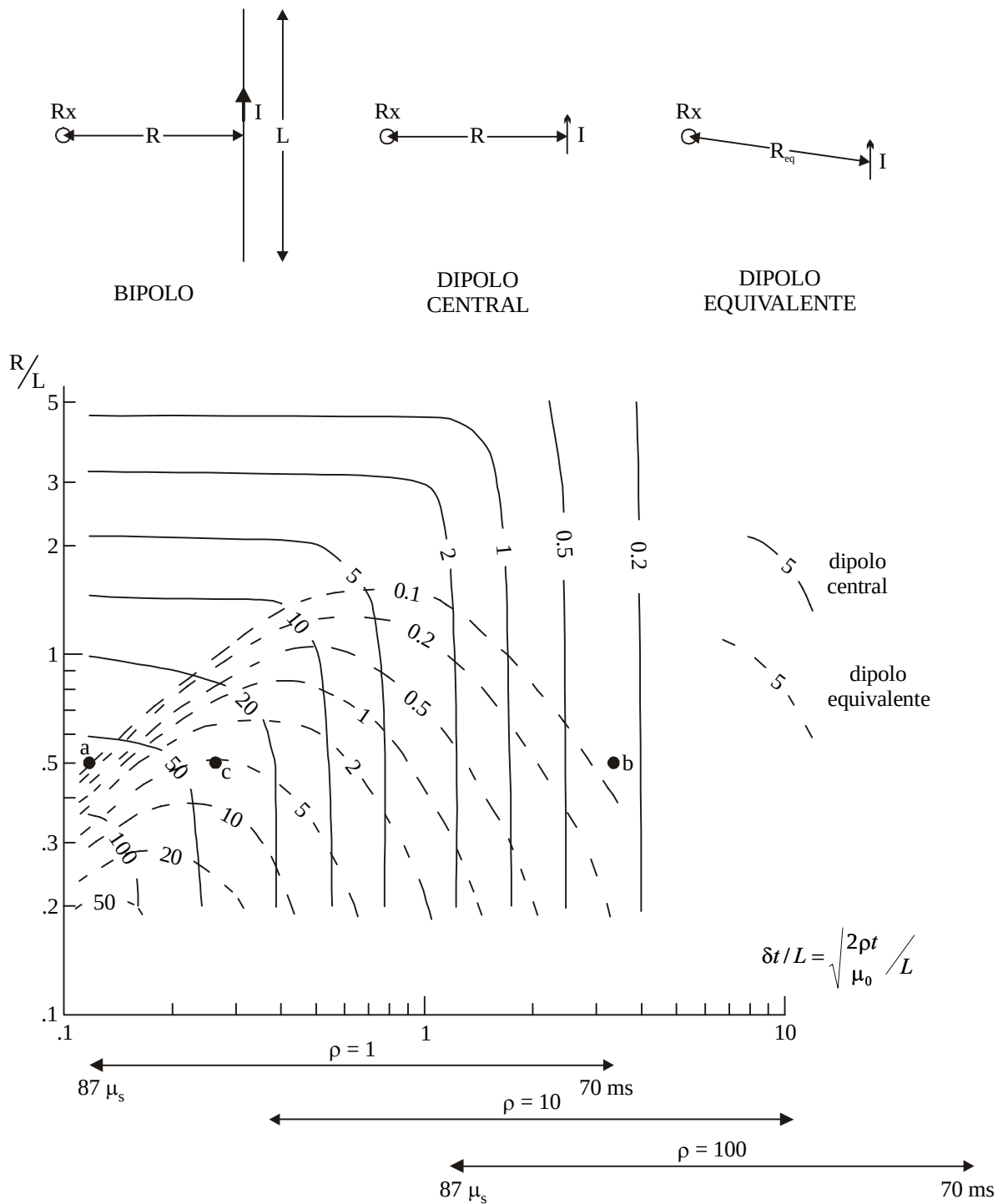


Figura 10. Aproximación del voltaje al escalón de un bipolo de corriente con un dipolo central y con un dipolo equivalente. Contornos de error porcentual, dipolo central (líneas continuas), dipolo equivalente (líneas discontinuas). En la parte inferior se muestran los rangos totales de tiempo cubiertos por el sistema Geonics para tres semiespacios de 1, 10 y 100 $\Omega \cdot \text{m}$. Véase el texto para una discusión de los puntos *a*, *b* y *c*.

tipo de análisis explica por qué, en la aproximación de una espira cuadrada con una circular de la Figura 9, las mayores diferencias se manifiestan en tiempos cortos y medios de baja resistividad.

APROXIMACIÓN CON EL DIPOLO EQUIVALENTE

Calcular la respuesta de una espira no-circular con integración numérica, aunque es la alternativa más exacta, no es eficiente por el alto consumo de tiempo de ejecución. Un compromiso entre el dipolo central y la integración es el uso del dipolo

equivalente propuesto por Stoyer (1990) quien, basado en las propiedades asintóticas de un bipolo de corriente en sus etapas temprana y tardía (Kaufman y Keller, 1983), propuso aproximar el bipolo con uno o más dipolos equivalentes. Estos dipolos se encuentran localizados sobre el bipolo pero ya no en una posición central. Para una espira cuadrada o rectangular cada lado de la espira es considerado como un bipolo de corriente.

La Figura 11a muestra el sistema coordenado empleado por Stoyer, en donde el eje x ahora coincide con el bipolo y el origen se encuentra en el punto medio del bipolo, mostrándose además las localizaciones de la bobina receptora en $P(x, y)$ y del dipolo equivalente en $(x_{eq}, 0)$. La abscisa x_{eq} del dipolo está dada por

$$x_{eq} = (r_{eq}^2 - y^2)^{1/2},$$

$$\text{con } r_{eq} = \left[\frac{L}{\pm \frac{x_2(2r_2^2 + y^2)}{3y^4 r_2^3} \mu \frac{x_1(2r_1^2 + y^2)}{3y^4 r_1^3}} \right]^{1/5},$$

$$r_2 = (x_2^2 + y^2)^{1/2}, r_1 = (x_1^2 + y^2)^{1/2}, x_2 = x + L/2, x_1 = x - L/2,$$

donde los signos $+$ y $-$ se seleccionan para que r_{eq} sea positivo. La aproximación del dipolo equivalente es buena en las etapas temprana y tardía, degradándose en la etapa transicional. Para un semiespacio homogéneo estas etapas están definidas por el número de inducción $\beta = r \sqrt{\mu/4\rho t}$, donde r es la distancia perpendicular del bipolo al receptor. Las etapas temprana y tardía están caracterizadas por $\beta \gg 1$ y $\beta \ll 1$, respectivamente, la etapa transicional por $\beta \approx 1$.

El empleo de uno o más dipolos equivalentes es evaluado en la Figura 11b, donde se presentan los errores (mayores a 0.1%) en los voltajes calculados con 1, 3 y 5 dipolos equivalentes con respecto a los determinados con integración de 20 puntos. El modelo es un semiespacio de $1 \Omega \cdot m$ empleando una espira de 150×150 m con el receptor en el centro. Para usar tres y cinco dipolos equivalentes cada lado de la espira fue dividido en tres y cinco secciones de misma longitud, usando un dipolo para cada sección. Debido a la simetría del problema, el uso de un número par de dipolos no presenta ninguna ventaja. Las curvas de error indican convergencia, es decir, que al aumentar el número de dipolos la respuesta se vuelve cada vez más exacta (los errores máximos para 1, 3 y 5 dipolos son 5.2, 2.2 y 0.8%, respectivamente). Asimismo, los máximos errores se presentan cuando el número de inducción es cercano a la unidad (Figura 11c). Para este semiespacio de $1 \Omega \cdot m$, $\beta = 1$ se encuentra aproximadamente en 2 ms. Para un modelo de $100 \Omega \cdot m$, la etapa transicional estaría centrada en $18 \mu s$, es decir, fuera del rango de tiempos que cubre el sistema Geonics (de $87 \mu s$ a 70

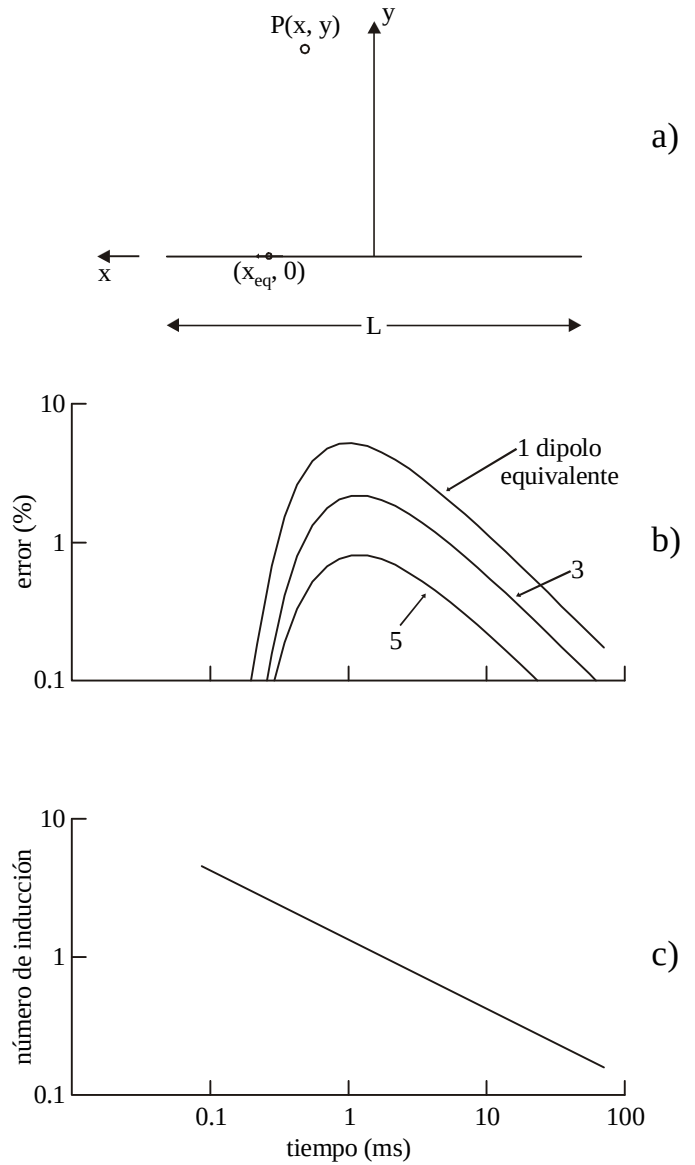


Figura 11. a) Dipolo equivalente de Stoyer sobre un semiespacio de $1 \Omega \cdot m$. b) Errores en la resistividad aparente en el centro de una espira cuadrada (150 m de lado) al aproximar cada lado con 1, 3 y 5 dipolos equivalentes. c) Números de inducción en función del tiempo.

ms), de tal manera que en este caso la aproximación con un solo dipolo sería suficiente.

La eficiencia del dipolo equivalente es ilustrada en la Figura 10, donde se presentan los contornos de error (líneas discontinuas) resultado de aproximar el voltaje al escalón en Rx de un bipolo de longitud L con un dipolo equivalente. En forma similar a lo realizado para el dipolo central, en la definición de los errores se usó el voltaje del bipolo calculado con 20 puntos de integración. Para discutir las diferencias entre las aproximaciones del dipolo central y el dipolo equivalente, consideremos nuevamente los puntos a y b de esta figura. Los errores en el punto a con dipolo central y equivalente son 70% y 0.09%, respectivamente, para el punto b son 0.26% y 0.08%. Con el dipolo central el error máximo de 70% se presenta en el tiempo más

corto de $87 \mu\text{s}$ (punto *a*), mientras que con el dipolo equivalente es de 5.2% (punto *c*), presentándose en un tiempo intermedio ($430 \mu\text{s}$). Claramente el dipolo equivalente es más eficiente que el dipolo central.

OTRAS FUENTES DE ERROR

Interpolación del kernel de Fourier. Para calcular el voltaje producido por un escalón de corriente mediante (5), es necesario determinar el kernel $\text{Im}[H_x(\omega)]$ en un rango de frecuencias. Para cada tiempo el rango de frecuencias se encuentra ligeramente desplazado respecto al tiempo anterior, lo que implica calcular nuevamente los kernels en frecuencias ligeramente diferentes. Esta operación repetitiva no es despreciable en términos de tiempo de cómputo, ya que para conocer el kernel en una frecuencia es necesario evaluar la transformada de Hankel. Por lo tanto, como una medida adicional para aumentar la rapidez, se optó por calcular los kernels de Fourier en forma completa sólo en los tiempos más corto y más largo del sistema Geonics. Para estimar los kernels de los otros tiempos se realiza una interpolación con polinomios cúbicos. La Figura 12a presenta un ejemplo de los kernels en función de la frecuencia en los tiempos de $87 \mu\text{s}$ y 70 ms. Puede observarse que existe un rango de frecuencias donde hay traslape. Con este procedimiento el programa es cuatro veces más rápido. Los errores cometidos al usar interpolación aumentan con la resistividad del subsuelo y tienden a ser significativos solo en los tiempos largos. Los errores máximos para tres semiespacios de 1, 100 y $10,000 \Omega \cdot \text{m}$ son -0.02%, -5.2% y -32%, respectivamente. Todos ellos se presentan cerca del tiempo más largo de 70 ms.

Corrección por función de transferencia de la bobina.

Una corrección adicional está relacionada con el hecho de que la función de transferencia de la bobina receptora tiene un ancho de banda limitado. Para el caso particular de la bobina que acompaña al sistema TEM57, esta función de transferencia está descrita por

$$C(f) = \frac{(1-x^2) - i1.86x}{(1-x^2)^2 + (1.86x)^2}$$

con $i = \sqrt{-1}$, $x = f/f_0$, $f_0 = 2.9 \times 10^4 \text{ Hz}$, siendo f la frecuencia. Los espectros de amplitud y fase de $C(f)$ se muestran en la Figura 12b. Nótese que se comportan como un filtro pasabajas con frecuencia de corte de 29 KHz. Aunque la naturaleza de esta corrección es de índole instrumental, se ha incluido aquí porque tiene un efecto significativo en la exactitud de la respuesta. La corrección es realizada antes de efectuar la transformada de Fourier con (5), multiplicando el campo magnético H_z (ω) por la función de transferencia de la bobina $C(\omega)$,

$$\text{Im}[H_z^c(\omega)] = \text{Im}[H_z(\omega)C(\omega)]$$

$$= \text{Re}[H_z(\omega)]\text{Im}[C(\omega)] + \text{Im}[H_z(\omega)]\text{Re}[C(\omega)]$$

donde H_z^c expresa al campo magnético corregido. El efecto de la bobina en las curvas de resistividad aparente se manifiesta como una disminución importante de los valores de tiempos cortos, decreciendo el efecto conforme el tiempo aumenta. Un ejemplo de este basculamiento de las resistividades aparentes se muestra en la Figura 12c para un semiespacio de $1000 \Omega \cdot \text{m}$. Si la curva marcada “con respuesta de la bobina” es interpretada ignorando el efecto de ésta, aparecerá una capa somera artificial de resistividad menor a $1000 \Omega \cdot \text{m}$. Análogamente, para un subsuelo estratificado la interpretación producirá capas someras más gruesas y más conductoras que las reales.

Error en la posición del receptor. En la práctica es común que existan incertidumbres espaciales, tanto en la posición relativa entre espira y bobina como en la forma de la espira. Estos errores geométricos son producidos por los obstáculos presentados por la vegetación y el relieve topográfico y por el uso de la brújula de mano para definir los ángulos. Es razonable suponer un valor de 5° como una incertidumbre típica en los azimuths. Se puede demostrar que estas desviaciones angulares en los lados de la espira tienen un efecto despreciable en la respuesta para el caso de la bobina receptora central, siempre y cuando no exista una alteración significativa del área total de la espira.

Para analizar el efecto en los voltajes de errores en la posición de la bobina receptora se consideró un caso sencillo consistente en una espira cuadrada de 150 m de lado sobre un semiespacio homogéneo de resistividad variable (1, 100 y $10,000 \Omega \cdot \text{m}$), con cuatro posiciones del receptor ($y = 0, 37.5, 112.5$ y 150 m) localizados en el perfil $x = 0$. El receptor $y = 0$ está en el centro, $y = 37.5$ m está en el punto medio entre el centro y un lado de la espira, y los puntos $y = 112.5$ y 150 m se encuentran fuera de la espira. Para calcular los errores se supuso un error de ± 7.5 m en la posición de la bobina, asociado con la incertidumbre de $\pm 5^\circ$ en los azimuths. Los errores máximos en los voltajes se presentan sistemáticamente en el tiempo más corto ($87 \mu\text{s}$), siendo más intensos para el medio de $1 \Omega \cdot \text{m}$. Este comportamiento de los errores concuerda con el comportamiento de los contornos de error de la Figura 10, donde la exactitud disminuye en tiempos cortos y para medios conductores. Para el semiespacio de $1 \Omega \cdot \text{m}$ los errores máximos en los cuatro receptores fueron, empezando desde la posición central, 3.4, 44.5, 59.3 y 43.4%. Para el medio de $100 \Omega \cdot \text{m}$ fueron -0.21, -2.4, -7.2 y 10.9%, mientras que para el medio resistivo de $10,000 \Omega \cdot \text{m}$ todos fueron menores a 0.1%. Nótese que los errores más pequeños ocurren en el centro de la espira y los más grandes fuera de la espira. Este comportamiento es explicado por el gradiente horizontal del voltaje, pues en la ausencia de heterogeneidades tridimensionales este gradiente es nulo en el centro de la espira y máximo fuera de ella.

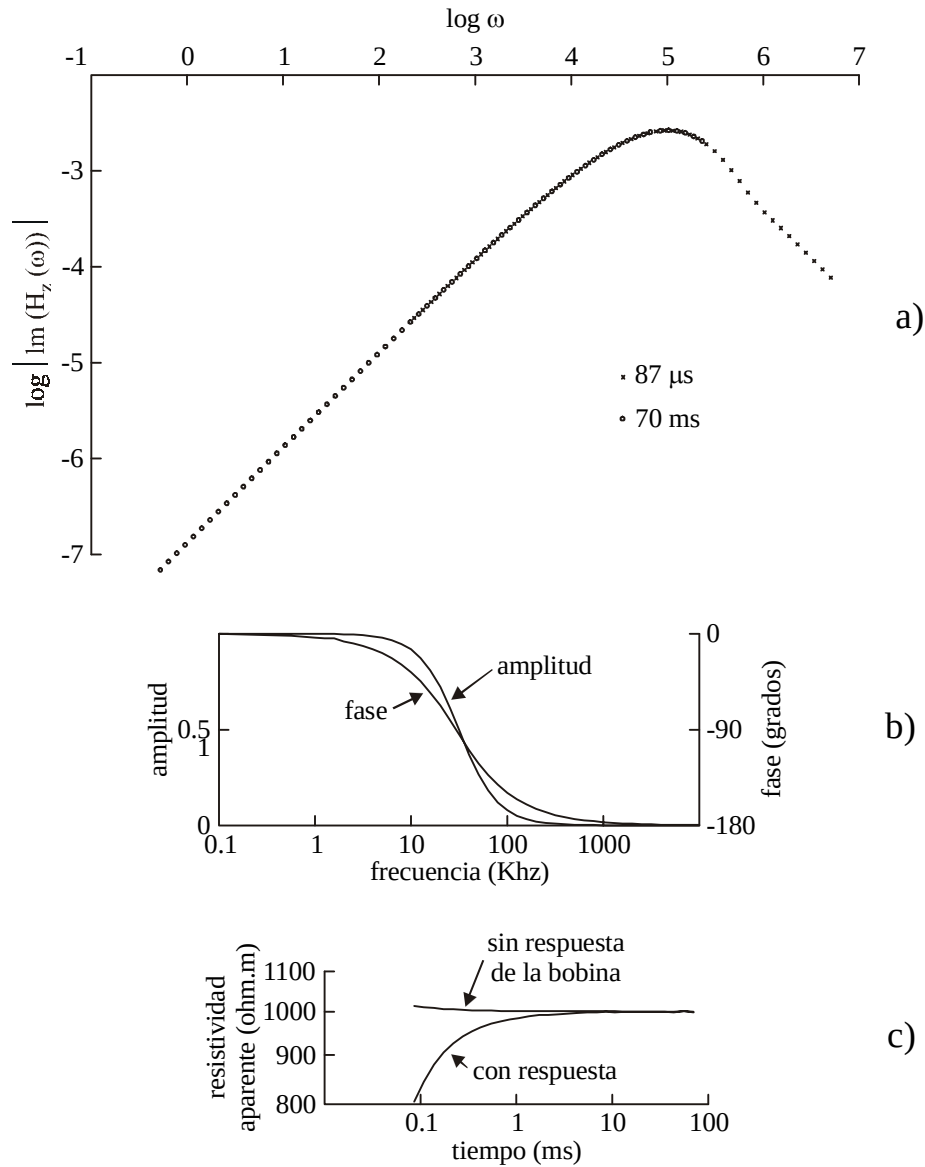


Figura 12. a) Valores del kernel de la transformada de Fourier en función de la frecuencia para los dos tiempos extremos del sistema Geonics. b) Espectros de amplitud y fase de la función de transferencia de la bobina LF del sistema Geonics. c) Comparación de las resistividades aparentes sin incluir el efecto de la respuesta de la bobina e incluyéndolo. Semiespacio de resistividad $1,000 \Omega \cdot m$.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Para estudiar la exactitud del método de convolución se tuvo especial cuidado en asegurarse de que el código de la solución al problema directo trabajara correctamente. Para ello se usaron comparaciones con soluciones independientes y pruebas de autoconvergencia. Puesto que la exactitud de la respuesta final depende de varios procesos numéricos, se siguió la estrategia de empezar con el caso más sencillo (voltaje al escalón de una espira circular sobre un semiespacio) y proceder por pasos hacia los casos más complicados. Esto permitió aislar y analizar un factor de exactitud en cada paso. De esta forma se estudiaron los siguientes factores o parámetros de exactitud: a) el valor de tolerancia de las dos convoluciones asociadas con las

transformadas de Hankel y Fourier, b) la corrección de rampas, c) la integración del campo a lo largo de los lados de una espira no-circular, d) las aproximaciones con un dipolo central y uno o más dipolos equivalentes, e) la aproximación de una espira cuadrada con una circular de misma área, f) la interpolación del kernel de Fourier, g) la corrección por la función de transferencia de la bobina y h) la incertidumbre en la posición del receptor.

Para evaluar el factor de tolerancia de las convoluciones se comparó con la solución analítica de un semiespacio, considerando tres resistividades ($1,100$ y $10,000 \Omega \cdot m$) que cubren una amplia gama de resistividades promedio reales. Para obtener exactitudes en las resistividades aparentes de 0.1% , los factores de tolerancia no deben ser mayores a 2×10^{-5} , 2×10^{-6} y 2

$\times 10^{-7}$, respectivamente. Medios resistivos requieren de tolerancias más pequeñas y, por lo tanto, de un mayor número de cálculos. Con estos valores se optimiza parcialmente el número de productos en las convoluciones y el número de veces que se tiene que evaluar el kernel de la transformada de Fourier. Puesto que en general los tiempos largos requieren de tolerancias más pequeñas, una optimización adicional consiste en definir una tolerancia que varíe con el tiempo. Dado que con datos reales es más común encontrarse con medios estratificados, estos valores de tolerancia deben de considerarse solo como una guía.

Para evaluar la corrección de rampas se desarrolló un programa que calcula el voltaje con el método de la serie de Fourier, siendo éste un proceso de cálculo diferente al de convolución. El método de la serie de Fourier es menos eficiente que el de convolución porque en la derivación numérica de $h_z(t)$ se amplifican las oscilaciones de Gibbs. Esta solución converge lentamente porque las oscilaciones decrecen lentamente con el número de armónicos, debido a que la corriente real en el transmisor no es una función suave.

Se verificó que la corrección de rampas trabajara satisfactoriamente para un subsuelo homogéneo. Para verificarla en el caso de un semiespacio estratificado se consideró un modelo de dos capas al que se le varió la resistividad y la profundidad de la segunda capa. Al estar basada en la suposición de que los voltajes tardíos se encuentran en la etapa lineal, la corrección de rampas trabaja mejor cuanto más alejada se encuentra la cima del sustrato de la profundidad máxima de investigación (D_{max}). Para el caso tratado D_{max} es 1150 m. En el modelo con la profundidad al sustrato de 1150 m fué donde la corrección resultó más inexacta, debido a que la curva de voltaje en tiempos largos todavía no se encuentra en la etapa lineal de decaimiento. Los errores debidos a esta corrección son de los más fuertes, pero se presentan solo en los tiempos más largos. En el caso estudiado el contraste de resistividades entre las dos capas es de una década, alcanzándose errores en las resistividades aparentes ligeramente mayores al 10%. La magnitud del error aumenta para contrastes de resistividad más intensos. Los errores resultaron mayores para el caso del sustrato conductor porque los métodos electromagnéticos inductivos, como es el caso del sondeo transitorio, son más sensibles a la presencia de medios conductores que a medios resistivos.

La convergencia de la integración numérica de la espira no-circular fué confirmada en diferentes posiciones del receptor. Esta solución fué considerada como exacta para evaluar la aproximación del voltaje de un bipolo de corriente con un dipolo central y un dipolo equivalente. La Figura 10 sintetiza la exactitud de estas dos aproximaciones al presentar en una sola gráfica los contornos de error en función de dos parámetros normalizados: la distancia al bipolo (R/L) y la longitud de difusión (δ_l/L). Con el dipolo central los errores son mayores a 1% cuando $R/L \leq 5$ y $\delta_l/L \leq 2$. La aproximación del dipolo central se deteriora significativamente en medios de baja resistividad y en tiempos cortos. La menor intensidad de los contornos de error

de la aproximación con el dipolo equivalente muestra, en concordancia con los resultados de Stoyer (1990), la eficiencia de este método, donde errores mayores a 1% son obtenidos cuando $R/L \leq 1$ y $\delta_l/L \leq 1.5$. Por lo tanto, en vez de calcular la respuesta de una espira rectangular o cuadrada con integración numérica, una alternativa eficiente consiste en remplazar cada lado con uno o más dipolos equivalentes. La aproximación de una espira cuadrada con una circular de área equivalente, aunque de uso extenso en la comunidad geofísica, no está exenta de error. Las diferencias más notables se presentan sistemáticamente en los tiempos cortos y en los medios más conductores, pudiendo llegar a valores de hasta 5%. Para medios resistivos esta aproximación trabaja mejor.

La interpolación del kernel de la transformada de Fourier aumenta significativamente la rapidez de cálculo, aunque produce errores importantes (del orden de 30%) en las resistividades aparentes de tiempos largos en medios resistivos. Es importante incluir la función de transferencia de la bobina receptora en la solución del problema directo. Si se invierten datos reales ignorando este efecto, las capas someras serán interpretadas como más gruesas y conductoras que las reales. Incertidumbres típicas de ± 7.5 m en la posición de la bobina receptora producen errores más intensos (de hasta 60%) en tiempos cortos, medios conductores y cuando el receptor se encuentra cerca de uno de los lados de la espira.

La Tabla 1 resume los errores máximos en el voltaje producidos por cada factor de exactitud considerando cinco resistividades del semiespacio (desde 1 hasta 10,000 $\Omega \cdot m$), separándolos según el rango de tiempos en el que se presentan (tiempos cortos y largos). En la obtención de estos valores se usó el arreglo de bobina central con una espira cuadrada de 150 m de lado o su espira circular de área equivalente. Los factores de exactitud que afectan a los tiempos cortos son:

- a) La aproximación de la espira cuadrada con una circular de misma área.
- b) La aproximación del dipolo equivalente. Los errores reportados corresponden al uso de un solo dipolo para cada lado de la espira.
- c) La ausencia de corrección por la respuesta de la bobina receptora.
- d) La incertidumbre de ± 7.5 m en la posición de la bobina.

Estos errores claramente son mucho mayores que la desviación estándar típica (0.1%) de los voltajes observados en tiempos cortos. Si se desea que la exactitud de los voltajes calculados sea del mismo orden que la precisión de los voltajes medidos y consideramos que las resistividades del subsuelo están comprendidas entre 1 y 10 $\Omega \cdot m$, será necesario cumplir con los siguientes requisitos: evitar el uso de la aproximación de la espira circular, usar un número elevado de dipolos equivalentes o, en su defecto, realizar la integración numérica en forma fina, aplicar la corrección por respuesta de la bobina y disminuir la

Tabla 1. Errores máximos (en porciento) en los voltajes para cada factor de exactitud.

TIEMPOS CORTOS				
Resistividad (ohm.m)	Aproximación espira circular	Dipolo equivalente	Ausencia de corrección de bobina	Posición de bobina (± 7.5 m)
1	-7.2	5.2	-1.2	3.4
10	0.6	5.2	-11.4	-0.6
100	0.8	1.3	-27.4	-0.2
1000	< 0.1	0.14	-29.0	< 0.1
10,000	< 0.1	< 0.1	-23.9	< 0.1

TIEMPOS LARGOS				
Resistividad (ohm.m)	Factor de tolerancia de las convoluciones		Corrección de rampas	Interpolación del kernel de Fourier
	error	tolerancia		
1	< 0.1	$\leq 1 \times 10^{-5}$	-6	< 0.1
10	< 0.1	$\leq 2.5 \times 10^{-6}$	37	1.1
100	< 0.1	$\leq 8 \times 10^{-7}$	44	8.4
1000	< 0.1	$\leq 4 \times 10^{-7}$	24	25
10,000	< 0.1	$\leq 1 \times 10^{-7}$	13	79

incertidumbre en la posición de la bobina. Estos requisitos producen un aumento importante en el tiempo de cómputo y una elevación de los costos del levantamiento de datos. Un compromiso razonable consiste en renunciar a las altas precisiones de los datos en tiempos cortos y suponer que las desviaciones estándar son mayores, digamos, de 1%. Con este valor de precisión pueden relajarse algunos de estos requisitos. En contraste, si las resistividades del subsuelo se encuentran entre 100 y $1000 \Omega \cdot \text{m}$, tanto la aproximación de la espira circular como el uso de pocos dipolos equivalentes son adecuados, pero es indispensable aplicar la corrección de la respuesta de la bobina y la incertidumbre en la posición de la bobina prácticamente no contribuye a la exactitud final.

Los factores que afectan a los voltajes de tiempos largos son:

- El valor de tolerancia de las convoluciones. En la Tabla 1 se indican los valores máximos de esta tolerancia para que el error sea menor a 0.1%.
- La corrección de rampas. Los errores reportados en la Tabla 1 corresponden a un sustrato conductor de resistividad diez veces menor que la resistividad de la primera capa, con su cima colocada en la profundidad máxima de investigación. Cuando el contraste de resistividades es de 100, estos errores se incrementan por un factor que varía de 1.7 a 3.4.
- La interpolación del kernel de la transformada de Fourier.

Para el análisis comparativo entre exactitud y precisión en tiempos largos, podemos desechar la contribución del factor a), pues la tolerancia es un parámetro controlable en el programa. Los factores b) y c), con magnitudes significativamente mayores a 0.1%, son los más importantes, afectando más intensamente a los medios de resistividad intermedia y alta. Estos errores disminuirán si se usa el método de la serie de Fourier y se evita interpolar el kernel. Sin embargo, esta decisión va a depender de la precisión particular de los voltajes medidos del

sondeo en cuestión, pues como lo muestra la Figura 2, es común que sobre subsuelos resistivos las magnitudes de las desviaciones estándar en tiempos largos sean del mismo orden o mayores que los errores de exactitud.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a Miro Bosnar de Geonics Ltd. por la información proporcionada sobre la bobina receptora y a José M. Romo por sus atinados comentarios que permitieron mejorar este trabajo.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M., and Stegun, I.A., 1972, Handbook of mathematical functions, *Dover Publications*, 1046 p.
- Anderson, W.L., 1975, Improved digital filters for evaluating Fourier and Hankel transform integrals, *U.S. Geol. Survey rep.* USGS-GD-75-012, 223p.
- Anderson, W.L., 1979, Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering, *Geophysics*, v. 44, p. 1287-1305.
- Asten, M.W., 1987, Full transmitter waveform transient electromagnetic modeling and inversion for soundings over coal measures, *Geophysics*, v. 52, p. 279-288.
- Davies, P.J., and Polonsky, I., 1972, Numerical interpolation, differentiation and integration, in: Abramowitz, M., and Stegun, I.A., (eds.), Handbook of mathematical functions, *Dover Publications*, p. 875-924.
- Fitterman, D.V., and Anderson, W.L., 1987, Effect of transmitter turn-off time on transient soundings, *Geoexploration*, v. 24, p. 131-146.

- Flores Luna, C., 1999, Cálculo de respuestas de medios estratificados con sondeos electromagnéticos transitorios, *Reporte Interno*, Depto. de Geofísica Aplicada, CICESE, 127 p.
- Ghosh, D.P., 1971, The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements, *Geophysical Prospecting*, v. 19, p. 192-217.
- Inman, J.R., 1975, Resistivity inversion with ridge regression, *Geophysics*, v. 40, p. 798-817.
- Jupp, D.L.B., and Vozoff, K., 1975, Stable iterative methods for the inversion of geophysical data, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 42, p. 957-976.
- Kaufman, A.A., 1979, Harmonic and transient fields on the surface of a two-layer medium, *Geophysics*, v. 44, p. 1208-1217.
- Kaufman, A.A., and Keller, G.V., 1983, Frequency and transient soundings, *Elsevier Science Pub.*
- Knight, J.H., and Raiche, A.P., 1982, Transient electromagnetic calculations using the Gaver-Stehfest inverse Laplace transform, *Geophysics*, v. 47, p. 47-50.
- Levy, G.M., 1984, Correction of measured transient electromagnetic responses for finite transmitter turn-off duration, Technical Note TN-16, Geonics Limited, 6 p.
- Nabighian, M.N., and Macnae, J.C., 1991, Time domain electromagnetic prospecting methods, in: M.N. Nabighian (ed.), *Electromagnetic methods in applied geophysics*, v. 2, Applications, Part A, *Society of Exploration Geophysicists*, p. 427-479.
- Papoulis, A., 1962, *The Fourier integral and its applications*, McGraw Hill.
- Poddar, M., 1982, A rectangular loop source of current on a two-layered earth, *Geophysics*, v. 30, p. 101-114.
- Raiche, A.P., and Spies, B.R., 1981, Coincident loop transient electromagnetic master curves for interpretation of two-layer earths, *Geophysics*, v. 46, p. 53-64.
- Raiche, A.P., Jupp, D.L.B., Rutter, H., and Vozoff, K., 1985, The joint use of coincident loop transient electromagnetic and Schlumberger sounding to resolve layered structures, *Geophysics*, v. 50, p. 1618-1627.
- Ryu, J., Morrison, H.F., and Ward, S.H., 1970, Electromagnetic effects about a loop source of current, *Geophysics*, v. 35, p. 862-896.
- Spies, B.R., and Frischknecht, F.C., 1991, Electromagnetic sounding, in: M.N. Nabighian (ed.), *Electromagnetic methods in applied geophysics*, v. 2, Applications, Part A, *Society of Exploration Geophysicists*, p. 285-386.
- Stoyer, C.H., 1990, Efficient computation of transient sounding curves for wire segments of finite length using an equivalent dipole approximation, *Geophysical Prospecting*, v. 38, p. 87-99.
- Verma, S.K., and Rai, S.S., 1982, Response of a layered earth to the Crone pulse electromagnetic system, *Geophysics*, v. 47, p. 63-70.

Wait, J.R., 1962, Theory of magneto-telluric fields, *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Radio Propagation*, v. 66D, p. 509-541.

APENDICE A

La amplificación del ruido con la operación de diferenciación en el método de la Serie de Fourier es ilustrada en la Figura 13 con un ejercicio donde se reconstruye una corriente real con 2,000 armónicos y se estima su derivada numéricamente, excluyéndose cualquier efecto de inducción electromagnética. Esto se expresa matemáticamente como

$$\frac{\partial I_N(t)}{\partial t} \cong \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{N=2000} s_n [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] .$$

La Figura 13a muestra la corriente real seleccionada, que tiene una frecuencia de repetición de 30 Hz y parámetros típicos observados en la práctica; también se muestra la localización de la primera ventana del sistema Geonics TEM57. En esta ventana la corriente debe ser nula. Sin embargo, cuando se reconstruye con la serie de Fourier (Figura 13b), presenta oscilaciones de baja amplitud alrededor de cero, producto del fenómeno de Gibbs, asociado con la aproximación de una función casi discontinua con una suma finita de funciones senoidales (Papoulis, 1962). Estas oscilaciones de Gibbs están caracterizadas por ser periódicas con período $\Lambda = T/N$ donde T es el período de la corriente. Para este ejemplo el período de Gibbs (Λ) tiene un valor de $16.7 \mu s$ (Figura 13b). Otra característica de estas oscilaciones es que su amplitud decrece con N y aumenta en la vecindad de las variaciones abruptas de la función original, es decir, cerca de los apagados y encendidos de la corriente. Este último comportamiento explica el aumento de las diferencias en los tiempos más cortos y más largos de la Figura 5.

La Figura 13c presenta los resultados de la aplicación de dos métodos numéricos en la estimación de la derivada de la corriente reconstruida, empleando una escala logarítmica en las ordenadas para acomodar el amplio rango dinámico de los resultados y mostrando con líneas discontinuas los valores negativos. Es importante notar que las dos curvas también presentan oscilaciones con el mismo período de Gibbs y que sus intensidades son amplificadas por la diferenciación, un efecto bien conocido de este proceso numérico. Considerando que la derivada real debe de ser nula, los resultados calculados con diferencias finitas centrales de dos puntos (curva 1) no son satisfactorios pues se obtienen valores de hasta ± 100 Amp/s. La técnica de diferencia central de dos puntos en un período de Gibbs, definida por

$$\frac{d I_N(t_i)}{d t} = \frac{I_N(t_i + \Lambda/2) - I_N(t_i - \Lambda/2)}{\Lambda}$$

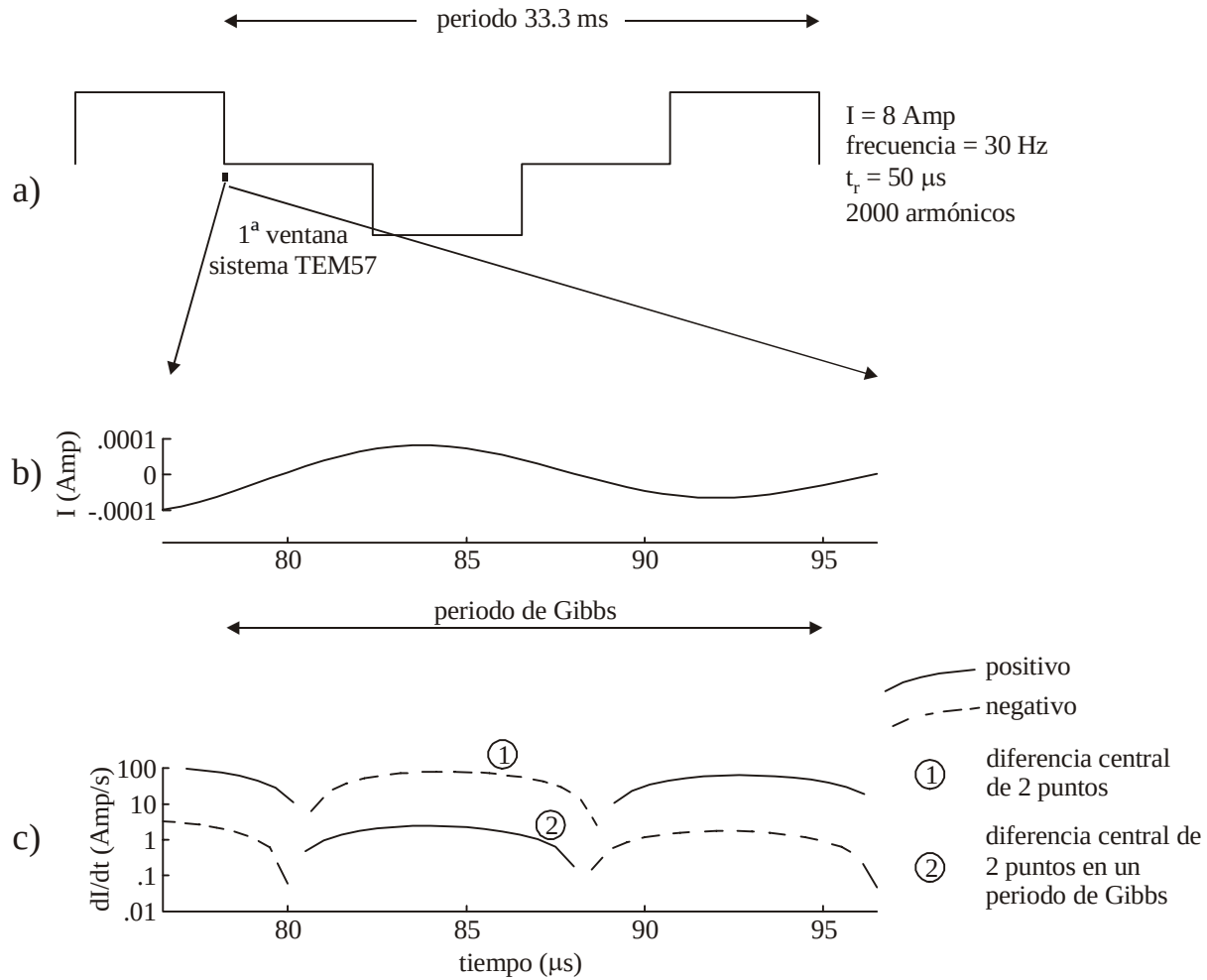


Figura 13. Reconstrucción de la corriente con la serie de Fourier y estimación de su derivada. a) Corriente de frecuencia 30 hz y anchos de rampa 50 μ s. b) Síntesis de la corriente con 2,000 armónicos en el rango de tiempo cubierto por la primera ventana del sistema Geonics. c) Aplicación de dos técnicas numéricas de derivación a la corriente sintetizada. Líneas discontinuas indican valores negativos.

resultó ser la más exitosa dentro de una variedad de técnicas probadas (Flores, 1999), y fue la adoptada para calcular la derivada de $h_z(t)$ en la expresión (15) del método de la Serie de Fourier. Su ventaja reside en que se aprovecha el período de las oscilaciones de Gibbs en su definición. Los resultados de esta técnica (curva 2) presentan una mejoría notable respecto a la curva 1, con amplitudes máximas de ± 3 Amp/s.