

# BALANCES DE ENERGÍA Y MOMENTO ANGULAR DE UN MODELO GLOBAL DE MAREAS CON ASIMILACIÓN DE DATOS

Wilfried Zahel<sup>1</sup>, Juan H. Gaviño R.<sup>2</sup> y Ulrike Seiler<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut fuer Meereskunde, Uni-Hamburg, Troplowitzstr. 7

D-22529 Hamburg, Deutschland, Germany

<sup>2</sup> CeUnIvO, Universidad de Colima

Apdo. Postal 275, Manzanillo, Colima, 28200, México

## RESUMEN

Al asimilar datos en un modelo oceánico de mareas utilizando un procedimiento variacional específico se obtienen mejoras significativas en los campos calculados. Los cambios en los niveles y velocidades de corriente inducidos por los datos afectan considerablemente los balances de energía y momento angular. Por medio de cantidades observables como la superficie oceánica, la carga gravitatoria y los parámetros de rotación terrestre se pueden demostrar mejoras en los resultados del modelo. Para investigar la influencia de los datos en los resultados, se calcularon para el Océano Mundial los balances de energía y momento angular de las componentes de marea semidiurnas ( $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ ,  $K_2$ ) y diurnas ( $K_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ) más importantes. Los cálculos se realizaron usando un procedimiento variacional específico de asimilación de datos en su forma más desarrollada. Se asimilaron datos del Topex Poseidon en 1425 posiciones uniformemente distribuidas sobre el océano para obtener los campos mareográficos de elevación y velocidad de la corriente. Se presentan cantidades integrales que caracterizan a estos campos y se efectuaron comparaciones con las elevaciones de datos que no fueron asimilados. Al tener que resolver un problema de minimización las ecuaciones mareográficas no se satisface exactamente lo que origina la presencia de residuos dinámicos. Se discuten los campos de residuos dinámicos respecto a su relación con los campos mareográficos. Se analizan los balances de energía y momento angular de las componentes de mareas calculadas en relación a modelos anteriores caracterizados por muy poca o ninguna influencia de datos. De una manera general se encuentran efectos sistemáticos de la influencia de los datos en estos balances, que aunados a los efectos sobre los parámetros calculados de la rotación terrestre, sugieren que propiedades características de los residuos dinámicos manifestados en los balances de energía y momento angular, reflejan correcciones o adiciones inducidas por los datos a la dinámica del modelo.

## INTRODUCCIÓN

Con la disponibilidad de datos pelágicos confiables de precisión (Smithson, 1992) y especialmente con los datos altimétricos de satélite, el estudio de la marea global ha recibido un gran estímulo en la última década (Le Provost *et al.*, 1998). La topografía global de la superficie oceánica derivada de la altimetría del Topex/Poseidon obtenida por varios autores (Shum *et al.*, 1997) tiene significativamente mejor concordancia con campos reales de elevaciones pelágicas que han sido cuidadosa y escrupulosamente seleccionadas. Campos y cantidades de relevancia geofísica, que pueden derivarse de los campos mareográficos de elevación y corrientes, representan una forma más de documentar la confiabilidad de estos campos mejorados por la utilización de datos, como es el caso en particular del campo de carga gravitatoria (Llubes and Mazzega, 1997) y de las fluctuaciones periódicas de la rotación terrestre (Chao and Ray, 1997). Modelos que minimizan por cuadrados mínimos funcionales donde la dinámica de marea representa una restricción débil han sido desarrollados y aplicados por Egbert *et al.* (1994) y Zahel (1991, 1997); mientras en ambos casos los funcionales de minimización son semejantes, los procedimientos de minimización son esencialmente diferentes y se han utilizado

ampliamente en la generación de campos restringidos por datos del Topex/Poseidon.

Como se verá más adelante, el presente modelo produce resultados de gran confiabilidad, y ha sido mejorado en relación a los utilizados en Zahel (1991) y Zahel (1995), sobre todo al considerar más apropiadamente las covarianzas de los errores dinámicos, permitiendo así que se originen campos residuales que reflejan uniformemente y de mejor manera en el espacio, verdaderas deficiencias del modelo. Por supuesto estas deficiencias dependen del modelo específico, aunque esencialmente están determinadas por defectos que son comunes a los modelos barotrópicos globales de mareas que se usan actualmente, defectos que tienen que ver con la falta de consideración de todos los procesos físicos que influyen sobre la marea barotrópica. Por lo anterior, creemos que averiguar el papel que los residuos dinámicos juegan en los diferentes mecanismos del modelo mareográfico, no solo corresponde a una descripción completa de los resultados, sino además puede contribuir a entender el tipo de deficiencias del modelo que son compensadas por los datos asimilados. Los balances de momento, de energía y especialmente de momento angular (como se ve en detalle en Seiler, 1991) con un modelo libre ofrecen la posibilidad de obtener más información de cómo los datos afectan resultados y propiedades del modelo.

## EL MODELO DE MAREAS

### LAS ECUACIONES DINÁMICAS

Las siguientes ecuaciones forman la base del modelo de mareas, cuya aplicación se discutirá subsecuentemente. Estas ecuaciones se discretizaron de la misma manera como se hizo en Zahel (1980) y en las aplicaciones con asimilación de datos (Zahel, 1991, 1995 y 1997).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} + r h^{-1} |\mathbf{v}| \mathbf{v} + \mathbf{F} + g \nabla \zeta - \\ \nabla \iint_S \zeta(t, \lambda', \phi') G(\lambda, \phi, \lambda', \phi') R_e^2 \cos \phi' d\lambda' d\phi' \\ = (1 + k_m - h_m) g \nabla \bar{\zeta}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

donde  $\zeta$  denota la elevación de la superficie marina respecto al fondo movable,  $\mathbf{v} = (u, v)$  es el vector velocidad de la corriente promedio de la columna de agua con componentes oeste-este  $u$  y sur-norte  $v$ ,  $h$  es la profundidad oceánica instantánea,  $g$  la gravedad en la superficie de una tierra esférica,  $r$  el coeficiente cuadrático de fricción con el suelo,  $\mathbf{f} = 2\Omega \sin \phi \mathbf{z}$  el vector aceleración de Coriolis,  $k_m$  y  $h_m$  números de Love y  $\bar{\zeta}$  el desplazamiento total de la superficie equipotencial de gravedad por el potencial generador de mareas de grado  $m$ . Si  $\delta$  es la deformación real del suelo oceánico, la elevación geocéntrica  $\zeta_0$  de la superficie marina se escribe como  $\zeta_0 = \zeta + \delta \cdot \mathbf{F}$  denota al vector que define los términos de segundo orden de viscosidad turbulenta ( $F_\lambda, F_\phi$ ) =  $(-A_h \Delta u, -A_h \Delta v)$ ,  $(\lambda, \phi)$  longitud y latitud terrestres,  $S$  es la superficie de un globo con radio  $R_e$  y  $G$  la función de Green para efectos de carga oceánica y atracción mutua

$$\begin{aligned} G(\lambda, \phi, \lambda', \phi') = \\ 1/4\pi \sum_n (1 + k'_n - h'_n) \alpha_n \sum_m P_n^m(\sin \phi) P_n^m(\sin \phi') \cdot \\ \cos(m(\lambda' - \lambda)), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $P_n^m$  son funciones asociadas de Legendre normadas,  $k'_n$ ,  $h'_n$  números de Love de carga y  $\alpha = (3/2n+1) \cdot (\rho_0 / \rho_e)$  la razón normada de densidad.

Cálculos con asimilación de datos de la componente  $M_2$  de marea muestran que la inclusión del efecto completo de carga gravitatoria produce campos mareográficos y cantidades físicas derivables de ellos que difieren despreciablemente de los obtenidos parametrizando el efecto de carga gravitatoria como se propone en Accad y Pekeris (1978). Para reducir el esfuerzo computacional para el cálculo de las mareas con diferentes

parámetros de asimilación, se utilizó esta parametrización consistente en la multiplicación de los términos del gradiente de presión por el factor 0.915.

### EL PROCEDIMIENTO DE ASIMILACIÓN DE DATOS

Al igual que en los primeros experimentos de asimilación de datos, se linealizaron las ecuaciones (1) y (2), se utilizó la ecuación (2) para eliminar las elevaciones  $\zeta$  de la ecuación (1) y considerando una dependencia temporal armónica simple en las variables:

$$(u, v, \zeta, \bar{\zeta}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\zeta}, \hat{\bar{\zeta}}) \exp(-i\sigma t)$$

( $\sigma$  es la frecuencia angular de la constituyente de marea en consideración) se obtiene, con  $\tilde{r}$  denotando el coeficiente de fricción lineal con el fondo

$$\begin{aligned} -\sigma^2 \hat{\mathbf{v}} - i\sigma \mathbf{f} \times \hat{\mathbf{v}} - i\sigma \tilde{r} h^{-1} \hat{\mathbf{v}} - i\sigma \hat{\mathbf{F}} - \\ 0.915g \nabla (\nabla \cdot (h \hat{\mathbf{v}})) = -i\sigma (1 + k'_m - h'_m) g \nabla \hat{\zeta}, \end{aligned} \quad (4)$$

al usar condiciones clásicas de frontera se llega finalmente a la discretización de las ecuaciones en diferencias finitas, que toman la forma de un sistema lineal algebraico

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}, \quad (5)$$

donde el vector incógnita  $\hat{\mathbf{x}}$  se compone de las amplitudes complejas de las componentes horizontales de velocidad de la corriente  $\hat{u}, \hat{v}$  que se localizan en los puntos de la malla de acuerdo a una celda de Richardson (Zahel, 1980). El vector  $\hat{\mathbf{b}}$  está definido por el potencial astronómico de mareas y la matriz  $\mathbf{A}$ , que es una expresión de la dinámica considerada, es en general densa debido a los efectos (LSA) de atracción mutua y carga gravitatoria, pero es hueca si se utilizan las parametrizaciones ya mencionadas. Todos estos pasos que conducen a la ecuación (5) también se efectuaron en esta investigación, aún cuando ni la remoción de la dependencia temporal, ni las linealizaciones, ni la eliminación de las elevaciones son necesarias para constituir el modelo de mareas con asimilación de datos del tipo aquí descrito. En consecuencia, esto se puede entender como un caso especial de un modelo más general, el cual ya mostró ser apropiado para tratar también problemas no lineales de asimilación de datos en aguas someras.

Las ecuaciones de datos están dadas por

$$\mathbf{D} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{d}}. \quad (6)$$

Si se consideran observaciones de  $m$  posiciones, solamente  $m$  renglones de la matriz  $\mathbf{D}$  y del vector  $\hat{\mathbf{d}}$  contienen componentes distintas de 0. Cuando se asimilan elevaciones de marea, (2) define la ecuación de datos con  $\zeta$  reemplazada por los valores observados, mientras que los datos de carga gravitatoria están relacionadas con los vectores de velocidad de la corriente  $\hat{\mathbf{v}}$  por

$$i\sigma \hat{g}_L = \rho \iint_S \nabla \cdot (h\hat{\mathbf{v}}) \tilde{G} R_e^2 \cos \phi' d\lambda' d\phi', \quad (7)$$

donde  $g_L = \hat{g}_L \exp(-i\sigma t)$  denota la carga gravitatoria y  $\tilde{G}$  a la función de Green correspondiente (Scherneck, 1990). El funcional de minimización usado está definido por

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}})^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}) + (\mathbf{D}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{d}})^H \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{D}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{d}}), \quad (8)$$

siendo  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{S}$  las matrices de covarianza de errores en la dinámica y en los datos respectivamente. Si se supone que los errores en los datos no están correlacionados,  $\mathbf{S}$  toma forma diagonal. Si  $\mathbf{R}$  es la matriz triangular inferior que resulta de la descomposición de Cholesky  $\mathbf{C} = \mathbf{R}\mathbf{R}^H$ , se busca la solución de cuadrados mínimos del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{b}}, \\ \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{S}^{-1/2} \hat{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Al aplicar el método de gradientes conjugados para obtener esta solución, sólo se requieren multiplicaciones matriciales y resolver un sistema lineal de ecuaciones con matrices triangulares superiores e inferiores. En lugar de efectuar la descomposición por Cholesky de  $\mathbf{C}$  y resolver un sistema triangular de ecuaciones en cada iteración cgs, como se acaba de describir y se realizó en Zahel (1997), aquí se aplicó un procedimiento computacional equivalente, pero más ventajoso. Este procedimiento está definido por un funcional de cuadrados mínimos que considera los cuadrados de los residuos dinámicos, los de sus primeras, los de sus segundas y si se quiere los de las diferencias de mayor orden y los de los residuos en los datos. Todos estos constituyentes cuadráticos tienen la misma forma que el primer término a la derecha de la ecuación (8), pero con  $\mathbf{C}^{-1}$  reemplazada para cada una de estas constituyentes por una matriz diagonal. La relación de este procedimiento con el de una introducción explícita de una matriz apropiada de covarianza de errores  $\mathbf{C}$  en (8) se explica en el apéndice. La elección de los elementos diagonales que se tomaron constantes para cada matriz involucrada y que define la correspondiente matriz  $\mathbf{C}$  de covarianza de errores, se discutirá en conexión con la presentación de los resultados numéricos.

Una vez obtenido el vector  $\hat{\mathbf{x}}$  que minimiza (8) o su expresión equivalente, se dispone del campo discreto de velocidades de corriente. Sustituyendo este campo en la ecuación discreta (2) independiente del tiempo se obtienen los niveles de superficie. De este modo la conservación de masa también se garantiza en el caso de asimilación de datos.

## CÁLCULO DE LAS PRINCIPALES COMPONENTES DE MAREAS DIURNAS Y SEMIDIURNAS

### PARÁMETROS DE ASIMILACIÓN Y RESULTADOS COMPUTACIONALES

Los resultados del modelo que se describirán a continuación fueron obtenidos incluyendo diferencias residuales de primer y segundo orden en el funcional de cuadrados mínimos a los cuadrados de los residuos dinámicos y a los cuadrados de los residuos en los datos. La consideración de los residuos en los datos en el funcional de minimización modificado (8), es decir, la asimilación de datos en el modelo, hace que el funcional tenga un mínimo. De esta forma, valores diferentes de cero se atribuyen a los términos individuales del funcional de acuerdo a las matrices peso consideradas. Hasta qué punto por ejemplo, las ecuaciones dinámicas son satisfechas y los datos asimilados son tomados en cuenta en las cantidades calculadas correspondientes se puede ver de las magnitudes de los residuos dinámicos y de los residuos en los datos respectivamente. Al sustituir la solución  $\hat{\mathbf{x}}$  del problema de minimización, el vector de residuos dinámicos  $\hat{\mathbf{q}}$  y el vector de residuos en los datos  $\hat{\mathbf{z}}$  se obtienen de

$$i\sigma \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \quad i\sigma \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}. \quad (10)$$

El vector  $\hat{\mathbf{q}}$  representa la discretización del vector continuo  $\mathbf{q}$  con componentes zonal  $q_\lambda$  y meridional  $q_\phi$ .

La magnitud del vector residual se determina por los constantes elementos diagonales de las matrices de peso, las cuales a su vez son definidas por suposiciones a priori sobre el modelo y las varianzas de los datos. Así, las desviaciones estándar de los datos se supone alcanzan un 3% de las respectivas amplitudes rms de elevación y las desviaciones estándar de las ecuaciones de momento llegan a un 6% de la magnitud rms del término más grande de estas ecuaciones, que es el término del gradiente de presión. Las magnitudes rms de los vectores residuales ascienden, por ejemplo, para la M2 y k1 a  $0.38 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$  y a  $0.10 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$  respectivamente. Las magnitudes rms de los vectores de residuos en los datos llegan a 1.1cm y a 0.58cm (figura 1, columnas de la derecha) respectivamente.

Si los datos son menos erróneos de lo que se presupone se obtiene que las respectivas cantidades calculadas concuerdan mejor con los valores de los datos asimilados. En el caso de una mejor concordancia que la que puede justificar la exactitud de los datos, los residuos dinámicos se incrementan demasiado y los sistemas de oscilación mareográficos calculados se vuelven menos realistas. Cuando, por otra parte, los datos son menos exactos de lo que se presupone, otra vez la concordancia con los datos independientes empeora. Con pesos decrecientes en los datos los resultados computacionales tienden a los obtenidos sin la asimilación de datos.

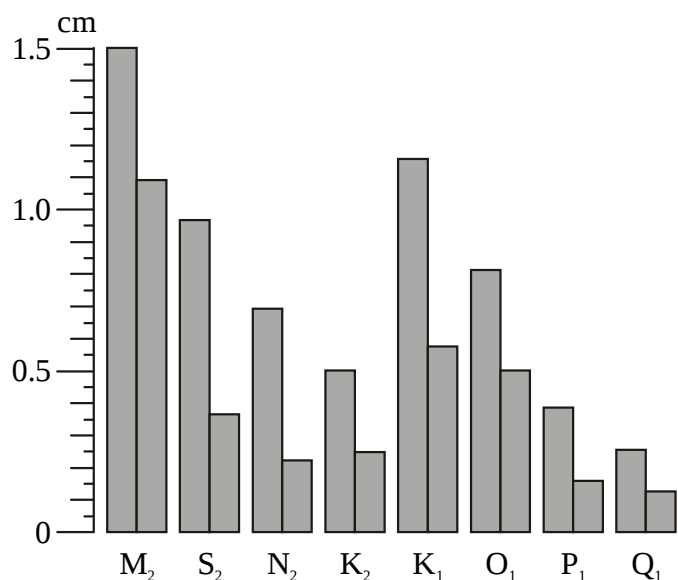


Figura 1. Valores rms de diferencias entre elevaciones calculadas y observadas. Columna derecha (izquierda) en los puntos asimilados (no asimilados) por el modelo.

Usar los parámetros de asimilación como se acaba de mencionar y como se atribuye a las diferencias en la dinámica (ver apéndice) conduce a una mejora considerable de los resultados computacionales debido a la asimilación en este modelo de los datos del Topex Poseidón. Esto se cuantificará en lo que sigue.

Considerar también diferencias de orden superior y variar los coeficientes de los términos de las diferencias residuales dentro de ciertos límites, muestra que respecto a los patrones principales, tanto los campos mareográficos calculados, como los campos residuales son insensibles a cambios en la matriz de covarianza básica.

## OSCILACIONES DE MAREAS

Se generaron campos globales de elevación de corrientes y de cargas gravitatorias para la M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, K<sub>2</sub>, K<sub>1</sub>, O<sub>1</sub>, P<sub>1</sub> y Q<sub>1</sub> aplicando el modelo descrito anteriormente con una resolución de 1° y asimilando datos del Topex/Poseidon (Eanes and Bettadpur, 1995) en 1425 posiciones pelágicas uniformemente distribuidas. Los patrones de elevación (ver figuras 2 y 3) sólo difieren ligeramente de los publicados en Zahel (1995), los cuales se restringían a 85 elevaciones pelágicas y a 14 datos de carga gravitatoria y de aquellos publicados por otros autores aplicando modelos con asimilación (variacional) de datos del Topex/Poseidon (Egbert *et al.*, 1994; Le Provost *et al.*, 1998). Los patrones principales de los sistemas de oscilación mareográficos se obtienen aún aplicando el modelo actual sin uso de información observacional (ver también Seiler 1989). Al parecer pequeños cambios en estos patrones, por ejemplo el desplazamiento de sistemas anfídromicos y cambios de posiciones y magnitudes de antinódos debido a la asimilación de datos pueden llevar a mejoras considerables en la concordancia con los datos de gran confiabilidad no asimilados.

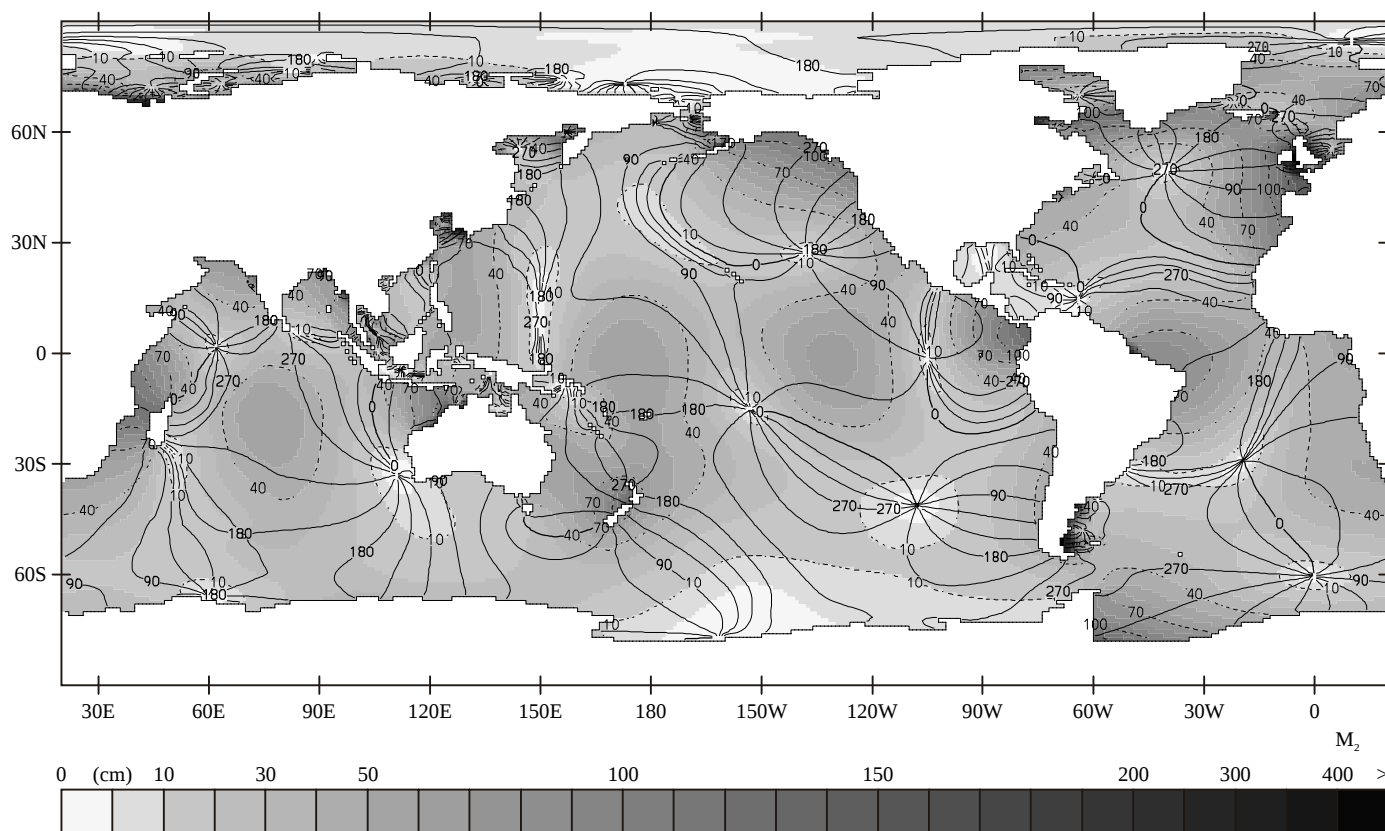
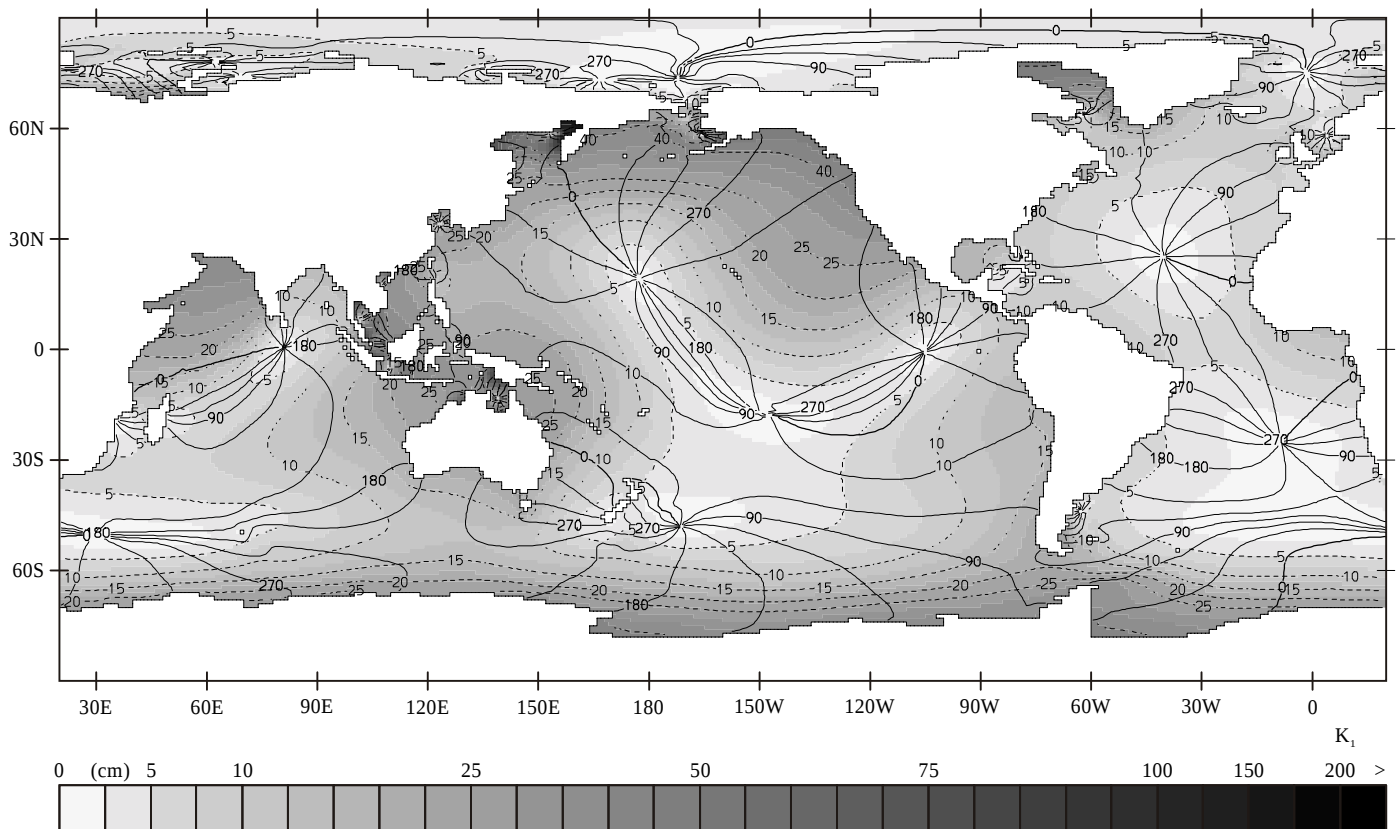


Figura 2. Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Marea M<sub>2</sub>. Amplitudes de elevación en cm. Líneas sólidas fases en grados referidas al paso por el meridiano de Greenwich.



**Figura 3. Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Marea  $K_1$ . Amplitudes de elevación en cm. Líneas sólidas fases en grados referidas al paso por el meridiano de Greenwich.**

De hecho, con el incremento de datos asimilados se reducen claramente las diferencias entre las elevaciones calculadas y las medidas con gran exactitud en tierra, sobre todo al interpolar los cálculos a las posiciones de las mediciones. Así, las diferencias rms entre los cálculos y las elevaciones de un conjunto de datos independientes de alta confiabilidad de 95 estaciones distribuidas sobre el océano mundial son para la  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ ,  $K_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$  y  $Q_1$  del orden de 1.49 cm, 0.97 cm, 0.69 cm, 0.50 cm, 1.16 cm, 0.81 cm, 0.39 cm y 0.26 cm respectivamente (figura 1, columnas izquierdas). Estas cantidades aproximadamente corresponden a  $\frac{1}{2}$  de las obtenidos cuando se asimilan un número restringido de datos (Zahel 1995) y a  $\frac{1}{5}$  de las obtenidas sin asimilación. Las elevaciones obtenidas con el presente modelo concuerdan muy bien con mediciones, como se puede verificar en el trabajo de Shum *et al.* (1997).

Las elipses de transporte se presentan en las figuras 4 y 5 para dar una idea de los campos calculados de corrientes que representan a las variables del modelo que aparecen en el funcional de minimización. Mientras las corrientes globales de marea no se pueden comparar de una manera representativa con los datos de gran confiabilidad no asimilados, los campos de carga gravitatoria obtenidos de los campos de corriente usando (7) se pueden verificar con mediciones gravimétricas. Los campos de carga gravitatoria obtenidos de una versión actualizada de Zahel (1995) asimilando datos del Topex/Poseidon han sido discutidos conjuntamente con los campos de elevación de la marea global obtenidos por otros autores en Llubes y Mazzega

(1997). De esta publicación se puede inferir que los resultados con carga gravitatoria del modelo ahí referido y que precede al actual, se ajustan bien a las observaciones, así como los de los modelos de los otros autores. En la tabla 1 se muestran en forma conjunta cantidades integradas de los campos mareográficos, que entre otras cosas reflejan el comportamiento resonante de las diferentes componentes de marea. Por desgracia, valores comparativos obtenidos por otros modelos están muy escasamente disponibles para la mayoría de estas cantidades. Las razones de energía potencial son parecidas a las dadas en Cartwright y Ray (1991).

## RESIDUOS DINÁMICOS

El orden de magnitud con el que las ecuaciones de momento se satisfacen dependiendo de las consideraciones hechas sobre la información observacional en el modelo de mareas ya se mencionó anteriormente. Ahora se discutirá la distribución espacial del vector residual así definido, antes de hacer referencia a su papel en los balances de energía y momento angular. En vista de la mejora considerable en los resultados computacionales debida a la asimilación de datos, se espera que el vector de residuos dinámicos refleje efectos físicos que no fueron considerados en el modelo básico de mareas.

La suavidad de los campos de los vectores residuales discretizados ( $q_\lambda$ ,  $q_\phi$ ), definidos por  $\hat{\mathbf{q}}$  se indica por los campos normalizados de las magnitudes rms de los vectores (Figuras 6

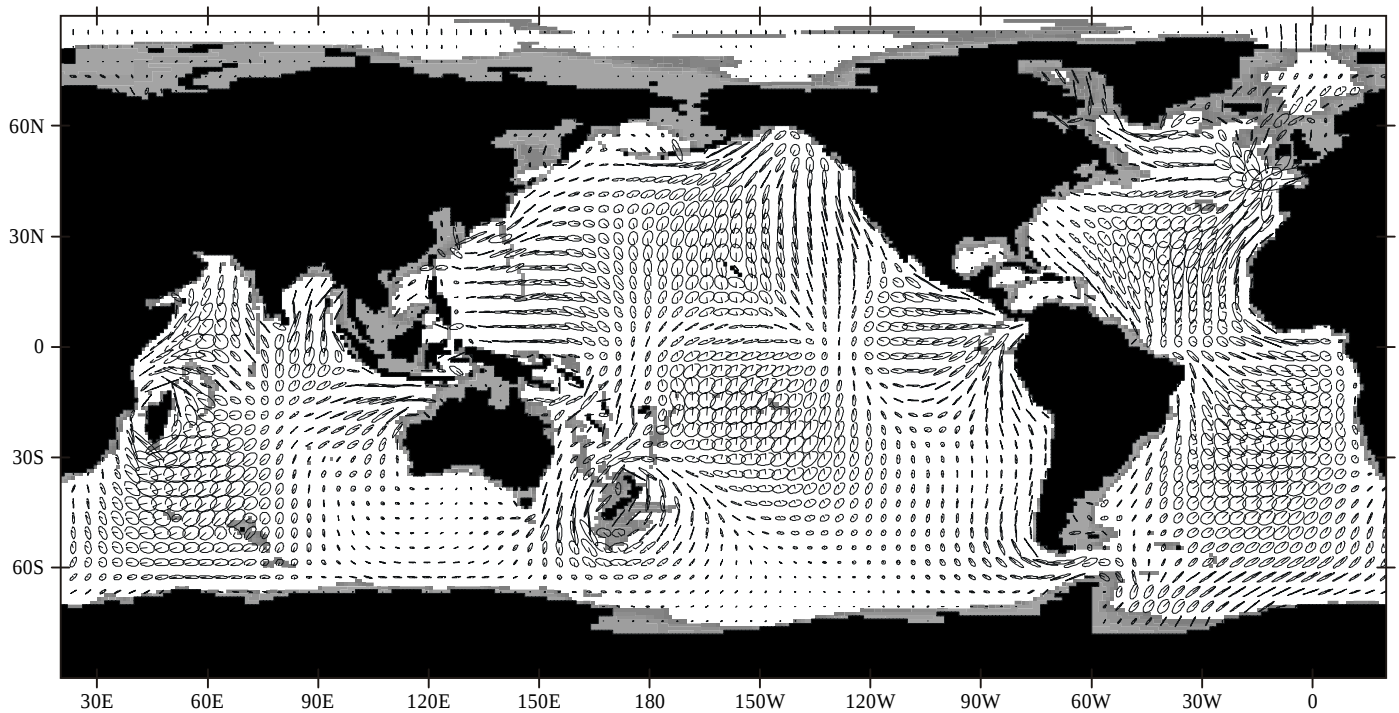


Figura 4. Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Marea  $M_2$ . Elipses de transporte de volumen. Sombreadas las zonas con profundidades menores a 1000m.

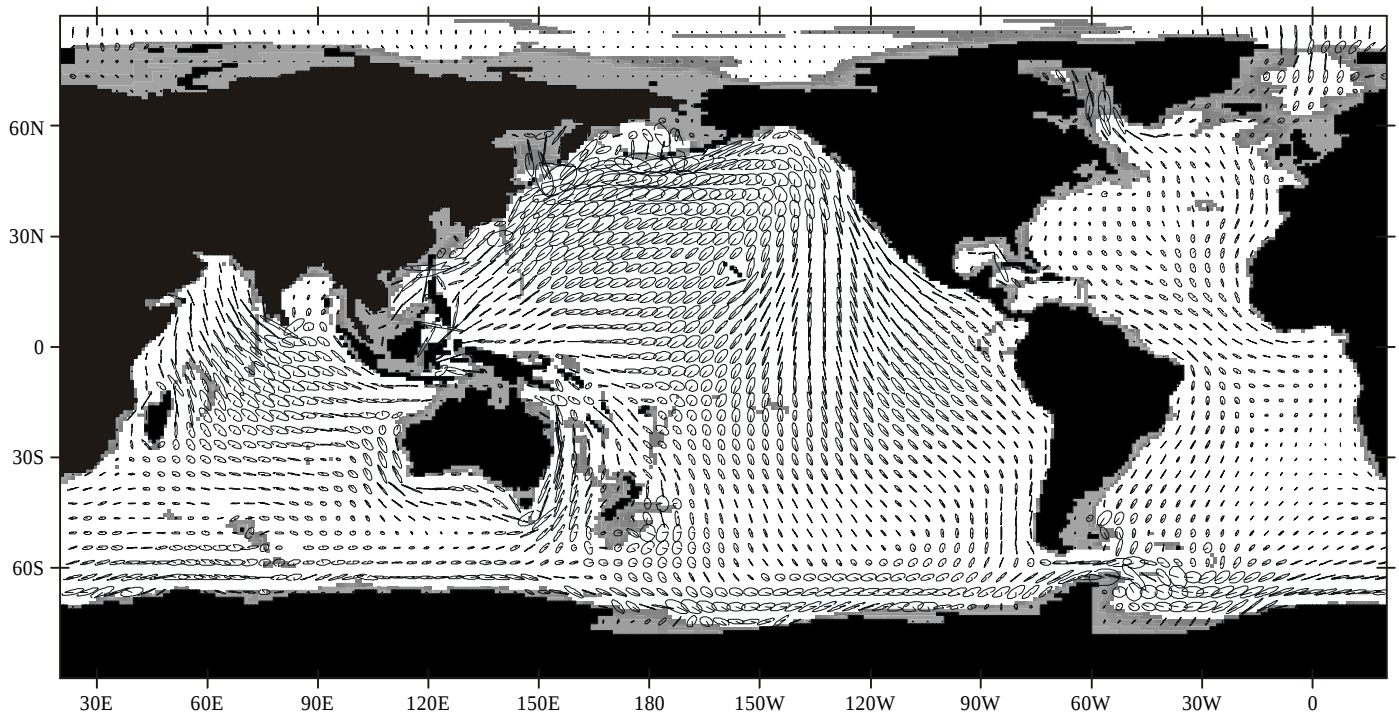


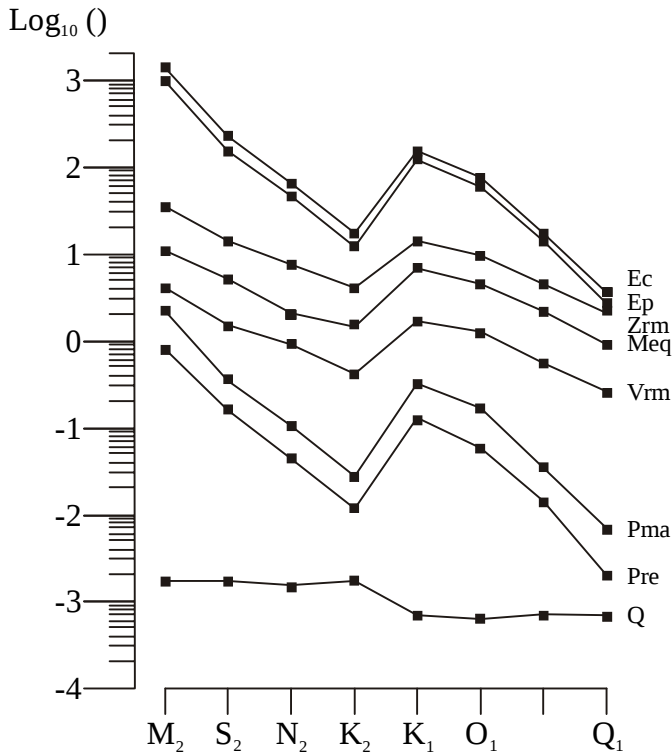
Figura 5. Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Marea  $K_1$ . Elipses de transporte de volumen. Sombreadas las zonas con profundidades menores a 1000m.

y 7). Es una consecuencia de la matriz específica de covarianza de los errores dinámicos introducida en el funcional de minimización. Como ya se discutió, el introducir esta matriz es equivalente (ver apéndice) a minimizar los residuos dinámicos y adicionalmente sus primeras y segundas diferencias usando matrices de peso diagonales.

Valores medios globales de las magnitudes máximas de los vectores de velocidad de corriente se dan en la tabla 1 para todas las constituyentes de mareas calculadas. Vectores de máxima residual aparecen claramente en los sistemas de oscilación diurnos y semidiurnos, ahí donde aspectos topográficos dinámicamente relevantes no han sido suficientemente bien resueltos, por ejemplo en el área de las Islas Kerguelen. En áreas

**Tabla 1. Cantidades integradas de los campos mareográficos calculados.**

| $M_2$                                               | $S_2$ | $N_2$ | $K_2$ | $K_1$ | $O_1$ | $P_1$ | $Q_1$ |
|-----------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Energía potencial [PJ=10 <sup>15</sup> J]           |       |       |       |       |       |       |       |
| 117.3                                               | 18.1  | 5.3   | 1.4   | 14.4  | 7.0   | 1.5   | 0.3   |
| Energía Cinética [PJ=10 <sup>15</sup> J]            |       |       |       |       |       |       |       |
| 170.6                                               | 26.1  | 7.4   | 2.0   | 18.2  | 9.1   | 1.9   | 0.4   |
| Potencia de marea [TW=10 <sup>12</sup> W]           |       |       |       |       |       |       |       |
| 2.375                                               | 0.381 | 0.113 | 0.028 | 0.353 | 0.179 | 0.036 | 0.007 |
| Potencia residual [TW=10 <sup>12</sup> W]           |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.876                                               | 0.172 | 0.046 | 0.012 | 0.139 | 0.063 | 0.014 | 0.002 |
| Elevación rms, amplitud [cm]                        |       |       |       |       |       |       |       |
| 40.91                                               | 16.21 | 8.62  | 4.42  | 15.24 | 11.01 | 4.98  | 2.29  |
| Marea de equilibrio [cm]                            |       |       |       |       |       |       |       |
| 12.30                                               | 5.72  | 2.35  | 1.56  | 7.66  | 5.10  | 2.37  | 0.98  |
| Velocidad de la corriente rms, semieje mayor [cm/s] |       |       |       |       |       |       |       |
| 4.51                                                | 1.65  | 0.98  | 0.44  | 1.87  | 1.37  | 0.61  | 0.28  |
| Factor Q                                            |       |       |       |       |       |       |       |
| 16.7                                                | 18.0  | 15.3  | 17.7  | 6.5   | 6.1   | 6.6   | 6.5   |

**Representación gráfica de la Tabla 1, pero Ec\*10, Ep\*10, Q/10<sup>4</sup>.**

caracterizadas por resonancias fuertes reconocibles en la distribución de niveles de marea (Fig. 2 y 3) y de elipses de transporte (Figs. 4 y 5), las magnitudes de los residuos dinámicos pueden alcanzar valores significativamente superiores a los del valor medio.

Esto aplica a la cuasi resonante onda Kelvin diurna en el océano Antártico con magnitudes que se amplifican hacia el pasaje Drake, a la oscilación diurna en el extremo Norte del Pacífico, a las mareas semidiurnas resonantes en el Atlántico Norte y especialmente a la oscilación  $M_2$  en el área alrededor de Nueva Zelanda. Todos estos fenómenos de resonancia son de-

terminados por el comportamiento de oscilación libre de los océanos, v.g., el descrito por el modelo básico sin forzamiento. Así, la onda diurna tipo Kelvin es un aspecto dominante de una solución de oscilación libre de las ecuaciones homogéneas con  $\sigma_1 = 0.26 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma_R = 0.550 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  en el factor temporal  $\exp(-(\sigma_1 + i \cdot \sigma_R)t)$ , es decir, con periodo de 31.7 h. El máximo residuo de la  $M_2$  en el Atlántico refleja entre otras cosas patrones dominantes de oscilación libre del modo con  $\sigma_1 = 0.40 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma_R = 0.138 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , es decir, de periodo 12.6 h. Como las fuerzas generadoras de mareas se conocen exactamente, las deficiencias del modelo de mareas aparecen como oscilaciones propias no completamente realistas. Así se espera que máximos de residuos aparezcan especialmente donde las excitaciones resonantes de los patrones de oscilación libre no estén bien resueltas por el modelo. Debido a cambios en las condiciones resonantes para las diferentes constituyentes de marea, los patrones de residuos máximos y mínimos son dependientes del periodo de marea.

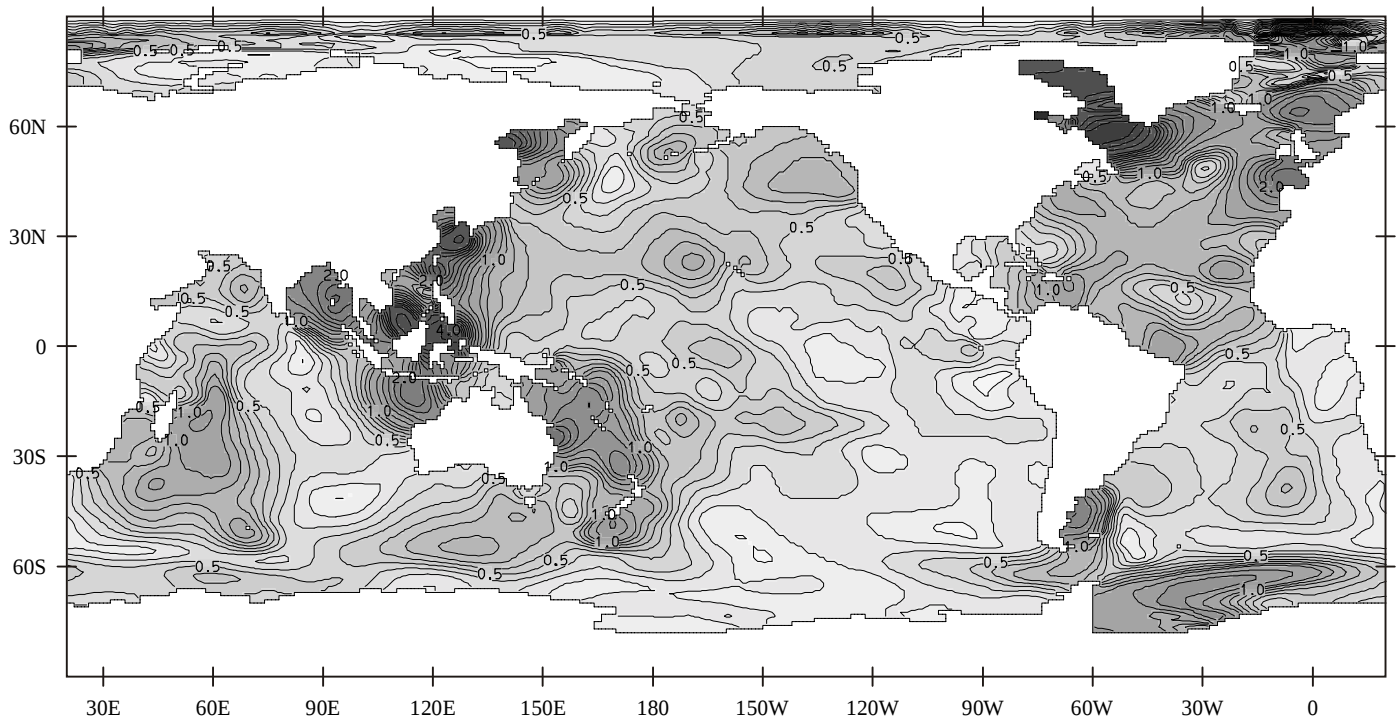
Obviamente se requieren datos para compensar la dinámica que el modelo no puede reproducir de comportamientos de respuesta particularmente sensitivos en el océano. Se ha encontrado que todos los máximos significativos de los residuos dinámicos son independientes de los valores de los diferentes parámetros de asimilación usados y que han producido mejoras razonables de los campos de marea por la influencia de datos.

## BALANCE DE ENERGÍA

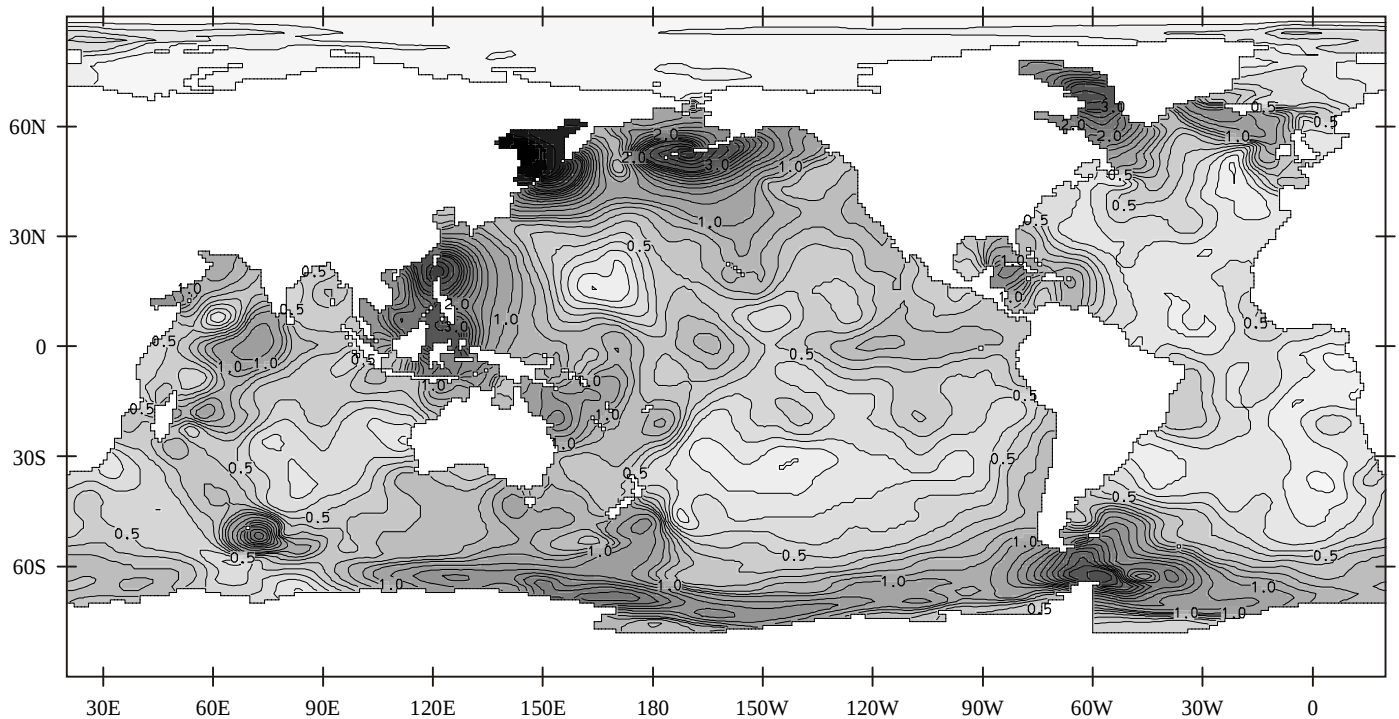
Un modelo de 1°, no puede resolver explícitamente los mecanismos reales de disipación, y esto también se cumple para modelos mareográficos barotrópicos de considerablemente mayor resolución (Kantha 1998). Esta es por supuesto una de las razones por la que se tienen que asimilar datos para obtener resultados más realistas. En consecuencia, es interesante reconocer tanto el papel que juegan los residuos dinámicos en el balance de energía del modelo respectivo como qué contribuciones al efecto global provienen de las diferentes partes del océano mundial. Debido a la todavía deficiente resolución de las zonas someras en el modelo actual, las contribuciones de los términos de fricción que se originan principalmente en estas áreas, no se discutirán en relación a su distribución espacial. La ecuación de energía integrada espacialmente y promediada temporalmente viene dada por (ver ecuación (4)):

$$\begin{aligned} & \left\langle \rho \tilde{r} (u^2 + v^2) \right\rangle + \left\langle \rho h (F_\lambda u + F_\phi v) \right\rangle - \\ & \left\langle \rho h (q_\lambda u + q_\phi v) \right\rangle = \left\langle \rho (1 + k_m - h_m) g \bar{\zeta} \partial_t \bar{\zeta} \right\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Las razones totales de disipación calculadas (valor a la izquierda de la igualdad en (9)) y dadas en la tabla 1, son muy parecidas a las obtenidas por los modelos avanzados de otros autores y a las obtenidas usando trayectorias de satélite (Schrama y Ray, 1994; Kantha, 1998). Como muestra la tabla 1, la potencia residual (el tercer término a la izquierda de la ecuación (11))



**Figura 6. Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Marea  $M_2$ . Isolíneas de magnitud rms de los vectores residuales normados respecto al respectivo valor rms espacial. Espaciamiento cada 0.1 unidades incrementándose hacia zonas oscuras.**



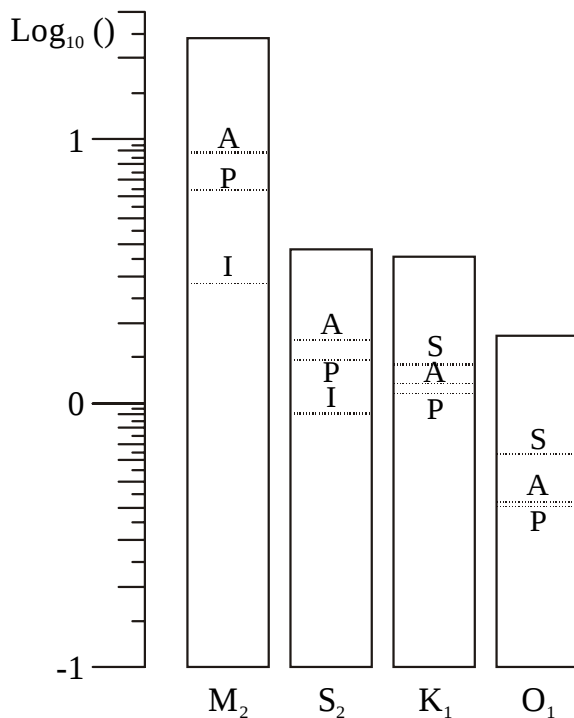
**Figura 7. Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Marea  $K_1$ . Isolíneas de magnitud rms de los vectores residuales normados respecto al respectivo valor rms espacial. Espaciamiento cada 0.1 unidades incrementándose hacia zonas oscuras.**

es positiva para todas las constituyentes que se calcularon, como ya se había obtenido al utilizar el modelo con un número muy restringido de datos (Zahel, 1995). Esto significa que los residuos son disipativos cuando se integran espacialmente y suplementan los efectos de los términos de fricción, o más precisamente, reemplazan parte del segundo término de la ecuación

(11) que representa una parametrización de los efectos físicos no resueltos. La razón de potencia de marea, si acaso, solo cambia ligeramente cuando se compara el modelo actual con versiones anteriores, pero la razón de potencia residual se incrementa, por ejemplo en el caso de la  $M_2$  de  $6.8 \cdot 10^{11}$  W a  $8.8 \cdot 10^{11}$  W y para la  $O_1$  de  $0.18 \cdot 10^{11}$  W a  $0.63 \cdot 10^{11}$  W. Como se ha verificado, estos cambios no son debidos a diferencias en las

estructuras del modelo, sino originadas por una mayor influencia de los datos. El hecho de que las razones de potencia residual hayan aumentado, particularmente para las menos resonantes constituyentes diurnas, se puede explicar por la distribución de los datos que ahora cubren más satisfactoriamente también áreas pequeñas de respuesta resonante. Esto se cumple para el Antártico, donde la resonancia diurna tipo Kelvin es influenciada directamente por datos del Topex Poseidon. Se puede ver de la figura 8 que, a diferencia de las mareas semidiurnas, el Antártico en efecto contribuye considerablemente a las razones totales de disipación diurna.

Generalmente se reconoce que el trabajo hecho por los residuos dinámicos toma valores positivos y negativos en todas las partes del océano. Las variaciones espaciales de esta cantidad tienen escalas de las cuencas marinas. Integradas sobre cada área oceánica del Atlántico, Pacífico e Índico el trabajo hecho por los residuos es positivo para todas las constituyentes de marea consideradas (figura 8). Las contribuciones del océano Ártico son negativas para las componentes semidiurnas, pero como en el caso de las mareas diurnas son insignificantes. Esta contribución positiva proviene de entre el 92% y 96% de aguas profundas. Estas contribuciones inducidas por datos a la disipación de marea en el océano abierto se pueden interpretar como una representación de efectos realísticos no resueltos por el modelo barotrópico de mareas utilizado, como pudiera ser por ejemplo la dispersión por batimetría de la marea superficial en ondas internas.



**Figura 8.** Modelo del Océano Mundial de 1° de resolución. Disipación total de energía mareográfica (Trabajo realizado por las fuerzas de marea) para la M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub>, K<sub>1</sub> y O<sub>1</sub>. Contribuciones de los diferentes océanos al trabajo hecho por los residuos dinámicos marcados por A: Atlántico, I: Índico, P: Pacífico y S: Antártico. Las contribuciones del Ártico son despreciables.

## BALANCES DE MOMENTO ANGULAR Y CAMBIOS DE LA ROTACIÓN TERRESTRE

Continuando con la búsqueda del papel que juegan los residuos dinámicos en la compensación de las deficiencias del modelo, en lo que sigue se discutirá el balance del momento angular, siguiendo lo dado en Seiler (1991) para un modelo libre, pero considerando la aparición de los residuos dinámicos inducidos por datos. El balance de momento angular es particularmente de interés pues las torcas que se incluyen en él determinan parámetros de rotación terrestre.

El cálculo acostumbrado de estos parámetros (Gross, 1993; Chao y Ray, 1997) se realiza por medio del método de momento angular en vez del método de la torca que hace uso de las torcas que aparecen en el balance de momento angular. Con el propósito de comparar los parámetros de rotación terrestre que resultan de los diferentes modelos, también se hará referencia a las razones obtenidas aplicando el método de momento angular. Este método utiliza las distribuciones de elevación y velocidad de la corriente calculadas, las cuales solo implícitamente reflejan el efecto de los residuos dinámicos. Con respecto a los parámetros de rotación terrestre, el efecto de la asimilación de datos se debe estimar comparando resultados de aplicaciones del modelo utilizando diferentes conjuntos de información de datos.

### ECUACIÓN DE BALANCE DE MOMENTO ANGULAR OCEÁNICO

La ecuación de balance de momento angular oceánico se deriva de la ecuación de momento y contiene las torcas que se ejercen en la interfase entre el océano y la tierra sólida, así como el cambio de momento angular relativo y la torca de la fuerza de Coriolis (Seiler, 1991). En el caso del modelo con el procedimiento de asimilación de datos esta ecuación cambia a

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{rel} + \mathbf{L}_{cor} &= d \mathbf{M}_{rel} / dt + d \mathbf{M}_{\theta} / dt + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_{rel} \\ &= -\mathbf{L}_p - \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_t - \mathbf{L}_{da}. \end{aligned} \quad (12)$$

Adicionalmente a la ya referida a un modelo libre se incluye la torca residual de la dinámica de marea  $\mathbf{L}_{da}$ . Este término se origina debido a la influencia de los datos. Denotando por  $\mathbf{a}$  el vector de posición el término  $\mathbf{L}_{da}$  resulta de aplicar el operador  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -\mathbf{q}$  e integrar sobre el volumen del océano. En la tabla 2 se presentan razones de  $\mathbf{L}_p$ ,  $\mathbf{L}_f$ ,  $\mathbf{L}_t$ ,  $\mathbf{L}_{da}$  para la M<sub>2</sub> y O<sub>1</sub> junto con las de cambio de momento relativo y de fuerza de Coriolis para el modelo con asimilación de 1425 posiciones.

Las fuerzas de fricción permanecen también de menor importancia en la ecuación de balance de momento angular cuando se asimila un mayor número de datos. De esta forma las razones de  $\mathbf{L}_f$  se mantienen aproximadamente dos órdenes de magnitud menor que las del término dominante, la torca de presión  $\mathbf{L}_p$ . Sin embargo el dominio de la torca de presión es diferente para las constituyentes individuales de marea y para las

**Tabla 2. Balance instantáneo de momento angular de un modelo global de mareas con la asimilación de datos de 1425 posiciones del Topex/Poseidon. Amplitudes  $A$  en  $10^{21}$   $\text{kgm}^2 / \text{s}^2$ , fases en grados.  $LR$ : Cambio de momento relativo,  $LC$ : Torca de la fuerza de Coriolis,  $LP$ : Torca de presión,  $LF$ : Torca friccional,  $LT$ : Torca da las fuerzas de marea,  $LDA$ : Torca de los residuos dinámicos.**

$$LR+LC=-LP-LF-LT-LDA$$

| $M_2$ | $X$   |       | $Y$   |       | $Z$   |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $A$   | $P$   | $A$   | $P$   | $A$   | $P$   |
| $LR$  | 1.461 | 171.6 | 2.441 | 75.1  | 2.438 | 233.4 |
| $LC$  | 1.745 | 323.3 | 1.093 | 240.4 | 0.930 | 351.8 |
| $LP$  | 0.544 | 103.8 | 1.430 | 261.6 | 1.596 | 73.4  |
| $LF$  | 0.005 | 332.6 | 0.009 | 172.9 | 0.005 | 225.7 |
| $LT$  | 0.194 | 53.1  | 0.193 | 322.6 | 0.327 | 72.6  |
| $LDA$ | 0.138 | 62.4  | 0.108 | 106.8 | 0.227 | 92.0  |
| $O_1$ | $X$   |       | $Y$   |       | $Z$   |       |
|       | $A$   | $P$   | $A$   | $P$   | $A$   | $P$   |
| $LR$  | 0.152 | 209.8 | 0.276 | 119.8 | 0.436 | 33.8  |
| $LC$  | 0.153 | 305.6 | 0.619 | 132.4 | 0.128 | 54.1  |
| $LP$  | 0.184 | 62.5  | 0.755 | 293.8 | 0.491 | 217.6 |
| $LF$  | 0.005 | 247.3 | 0.003 | 248.0 | 0.001 | 128.0 |
| $LT$  | 0.088 | 103.7 | 0.217 | 354.5 | 0.081 | 232.7 |
| $LDA$ | 0.053 | 248.6 | 0.032 | 39.1  | 0.014 | 94.9  |

componentes en las direcciones  $-x$ ,  $-y$ ,  $-z$ . El segundo término más importante es la torca de marea que excede en magnitud hasta en un 20% a la torca de presión solo en el caso de la componente  $-x$ . Este hecho corresponde a resultados anteriores (Seiler, 1991) obtenido aplicando modelos libres. Ahora, con datos afectando el balance aparece adicionalmente la torca residual  $L_{da}$ , mientras las otras componentes a través de cambios de la superficie oceánica y en las corrientes incluyen también la influencia de los datos. Esto no parece ser una relación fija de esta razón a aquellas de las otras torcas. Sin embargo para todas las componentes de la  $M_2$  y la componente  $-x$  de la  $O_1$ , la amplitud de la torca residual varía entre el 60% y el 70% de la torca por marea, mientras que para las otras componentes de la  $O_1$ , la amplitud varía entre el 10% y el 20%. Esto significa que para la componente  $-x$ , para la cual el predominio de la torca de presión no es tan grande como para las otras componentes, la contribución del residuo al balance de la suma de cambios de momento angular relativo y la torca de la fuerza de Coriolis es importante y alcanza entre el 25% y el 30% del término de presión. En esencia también se cumplen las observaciones anteriores concernientes al papel de  $L_{da}$  para las otras constituyentes diurnas y semidiurnas respectivamente, donde además para la  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$  la contribución de  $L_{da}$  para la mayoría de las componentes es igual de importante que la de  $L_r$ .

La suma de los cambios de momento angular relativo y la torca de la fuerza de Coriolis se comporta para la  $M_2$  y  $O_1$  en el caso de las componentes  $-y$  y  $-z$  como se conocía de la aplicación de los modelos libres. La situación se vuelve diferente en el caso de la componente  $-x$  donde por ejemplo la amplitud resultante cuando se asimilan datos ya no es pequeña comparada con las amplitudes de  $(L_{rel})_x$  y  $(L_{cor})_x$ . Para las otras constituyentes de mareas estudiadas los cambios más significantes debidos a la asimilación, aparecen también en la componente  $-x$ .

Resumiendo, se puede decir que debido a la escala espacial suficientemente grande de las torcas residuales, éstas contribuyen en forma no despreciable a los balances de momento angular, los cuales se determinan por contribuciones de gran escala. Es obvio que la ecuación de momento angular es palpablemente más afectada por la asimilación de datos para la componente  $-x$  que para las otras componentes.

## CAMBIOS EN EL TIEMPO UNIVERSAL Y VARIACIONES DE ORIENTACIÓN DEL EJE

La estimación de la desviación periódica de  $UT1$ , definida por la rotación terrestre, de una regular se logra en base de la componente axial (la componente  $-z$ ) de las ecuaciones de Liouville con una función de excitación  $\psi_3$  dada por el momento angular oceánico (Gross, 1993)

$$\psi_3 = -\frac{1}{\Omega C_m} (M_z^r + 0.756 \cdot M_z^\theta). \quad (13)$$

En esta ecuación el factor 0.756 explica la plasticidad de la tierra sólida y  $C_m$  denota el momento de inercia principal más grande del manto. Las variaciones de  $UT1$  se dan entonces por

$$\psi_3(t) = -\frac{d\Delta UT1}{dt}, \quad \Delta UT1 = A_T \cos(\sigma t - \phi_T), \quad (14)$$

Los valores para  $\Delta UT1$  obtenidos por el modelo actual y por versiones anteriores (85 en vez de 1425 posiciones) se dan en la tabla 3 con las contribuciones parciales del momento angular relativo (corrientes) y rotacional (elevaciones).

La comparación con los resultados dados en Gross (1993), basados en un modelo libre de Seiler (1989), muestra que aún asimilando un restringido pero confiable conjunto de datos se logra un paso importante para obtener valores más realistas de  $\Delta UT1$  (Chao *et al.*, 1996). Las razones obtenidas aquí y en el modelo anterior no difieren esencialmente de los obtenidos por otros modelos que asimilan datos del Topex/Poseidon (Chao y Ray, 1997; Kantha, 1998). Debido a incertidumbres en las razones observadas (Chao *et al.*, 1996) no se puede decir qué modelo produce resultados más realistas. Sin embargo, haciendo referencia al mismo tipo de modelo que se ha venido usando con la misma resolución espacial, pero con muy distinta dependencia de datos (Gross, 1993; Zahel, 1995; modelo actual), permite observar la influencia de los datos sobre valores  $\Delta UT1$ .

En el caso de las principales constituyentes semidiurnas y de la  $O_1$ , la influencia de los datos generalmente ocasiona una reducción realista de las amplitudes  $\Delta UT1$ , al disminuir las razones de las amplitudes de momento angular por corrientes y elevaciones, pero las diferencias de las fases correspondientes permanecen casi constantes. Las amplitudes de momento angular de la  $K_1$  y  $P_1$  solo sufren cambios moderados con la asimilación de datos, pero cambios en la diferencia de fase ocasiona razones inversas de amplitudes de  $\Delta UT1$  al contrario de las de momento angular.

**Tabla 3. Amplitudes y fases de  $\Delta UT1$  mareográfico relativas a los argumentos de equilibrio en el meridiano de Greenwich. Razones totales y parciales basadas en los resultados del modelo. Zahel (1995): asimilación de datos pelágicos en 85 posiciones. Modelo actual: asimilación de datos del Topex/Poseidon en 1425 posiciones. Observaciones de las Razones totales por Sovers *et al.* (1993), Herring and Dong (1994), Gipson (1996).**

|                      | $M_2$      | $S_2$      | $K_1$     | $O_1$     |
|----------------------|------------|------------|-----------|-----------|
| Zahel, 1995          |            |            |           |           |
| Total                | 19.2, 248° | 7.8, 266°  | 20.9, 42° | 23.2, 35° |
| Corriente            | 23.0, 233° | 10.3, 251° | 20.5, 49° | 19.1, 32° |
| Niveles              | 6.9, 3°    | 3.5, 34°   | 2.5, 325° | 4.2, 50°  |
| Modelo actual        |            |            |           |           |
| Total                | 21.2, 250° | 8.1, 277°  | 19.4, 35° | 22.0, 37° |
| Corriente            | 23.5, 233° | 9.7, 260°  | 19.2, 45° | 18.2, 34° |
| Niveles              | 6.8, 351°  | 3.0, 30°   | 3.2, 314° | 4.0, 54°  |
| Observaciones, Total |            |            |           |           |
| Sovers <i>et al.</i> | 18.2, 235° | 5.2, 266°  | 15.5, 13° | 21.4, 39° |
| Herring & Dong       | 17.9, 233° | 8.6, 269°  | 18.9, 20° | 23.6, 47° |
| Gipson               | 18.6, 236° | 8.0, 264°  | 18.6, 29° | 22.2, 37° |

|                      | $N_2$     | $K_2$     | $P_1$     | $Q_1$    |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|----------|
| Modelo actual        |           |           |           |          |
| Total                | 4.6, 239° | 2.2, 278° | 6.6, 34°  | 5.9, 30° |
| Corriente            | 4.7, 229° | 2.6, 262° | 6.4, 42°  | 4.3, 27° |
| Niveles              | 0.8, 332° | 0.8, 33°  | 0.9, 317° | 1.6, 38° |
| Observaciones, Total |           |           |           |          |
| Sovers <i>et al.</i> | 3.0, 221° | 2.8, 251° | 7.2, 27°  | 6.6, 37° |
| Herring & Dong       | 3.2, 240° | 3.8, 282° | 7.1, 34°  | 5.3, 36° |
| Gipson               | 3.7, 239° | 2.9, 283° | 5.8, 25°  | 5.6, 31° |

Cuando se comparan las razones por corriente y por niveles en los cálculos de  $\Delta UT1$  obtenidos para la  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$ ,  $O_1$ , con modelos sin asimilación de datos, con los con asimilación de un conjunto restringido de datos de presión y de datos uniformemente distribuidos del Topex/Poseidon, se encuentra una tendencia clara en el sentido que las amplitudes y las fases decrecen o se incrementan monótonamente al aumentar la dependencia con los datos. Sólo las razones de amplitud por la corriente en la  $K_1$  son una excepción significativa. Este comportamiento (incluyendo la excepción) es obviamente debido al correspondiente comportamiento de las razones por altura y por corriente de momento angular (Tablas 4 y 5).

Las razones de momento angular y de  $\Delta UT1$  obtenidas por los modelos con asimilación de datos, sin embargo, no difieren mucho entre si y el comportamiento de convergencia descrito anteriormente se muestra en las razones totales solo para las fases y no para las amplitudes.

## VARIACIONES DE ORIENTACION DEL EJE

Con la disponibilidad de las razones del momento angular por corrientes y elevaciones, también las componentes no axiales de la rotación terrestre se pueden evaluar y estudiar con respecto a los efectos de la asimilación de datos

El intercambio de momento angular que influye en las componentes no axiales o de movimiento polar de la rotación terrestre se evalúa aplicando la relación

**Tabla 4. Amplitudes [ $10^{25}$  kgm<sup>2</sup>/s] y fases [°] del momento angular de las mareas semidiurnas. Zahel (1995): asimilación de datos pelágicos en 85 posiciones. Modelo actual: asimilación de datos del Topex/Poseidon en 1425 posiciones.**

|                     | $x$           | $y$           | $z$           |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|
| $M_2$ Zahel, 1995   |               |               |               |
| corriente           | 0.749, 267.0° | 1.566, 177.0° | 1.694, 322.5° |
| niveles             | 0.426, 8.1°   | 0.285, 303.8° | 0.671, 93.0°  |
| $M_2$ Modelo actual |               |               |               |
| corriente           | 1.039, 261.4° | 1.737, 165.0° | 1.735, 323.3° |
| niveles             | 0.517, 14.6°  | 0.339, 295.1° | 0.662, 81.4°  |
| $S_2$ Zahel, 1995   |               |               |               |
| corriente           | 0.479, 300.3° | 0.919, 205.2° | 0.788, 340.7° |
| niveles             | 0.082, 41.1°  | 0.259, 6.2°   | 0.356, 123.5° |
| $S_2$ Modelo actual |               |               |               |
| corriente           | 0.439, 305.6° | 0.890, 201.5° | 0.737, 350.1° |
| niveles             | 0.128, 46.1°  | 0.284, 5.9°   | 0.302, 119.6° |
| $N_2$ Modelo actual |               |               |               |
| corriente           | 0.164, 247.9° | 0.259, 164.0° | 0.343, 319.4° |
| niveles             | 0.130, 348.9° | 0.034, 227.5° | 0.072, 262.4° |
| $K_2$ Modelo actual |               |               |               |
| corriente           | 0.124, 310.0° | 0.252, 204.9° | 0.202, 351.7° |
| niveles             | 0.030, 45.4°  | 0.083, 10.0°  | 0.081, 123.3° |

**Tabla 5. Amplitudes [ $10^{25}$  kgm<sup>2</sup>/s] y fases [°] del momento angular de las mareas diurnas. Zahel (1995): asimilación de datos pelágicos en 85 posiciones. Modelo actual: asimilación de datos del Topex/Poseidon en 1425 posiciones.**

|                     | $x$           | $y$           | $z$           |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|
| $K_1$ Zahel, 1995   |               |               |               |
| Corriente           | 0.534, 295.2° | 1.025, 199.3° | 0.786, 139.0° |
| Niveles             | 0.650, 312.7° | 1.405, 229.7° | 0.129, 54.7°  |
| $K_1$ Modelo actual |               |               |               |
| Corriente           | 0.514, 286.4° | 0.785, 197.6° | 0.735, 135.0° |
| Niveles             | 0.477, 308.2° | 1.387, 222.2° | 0.162, 44.0°  |
| $O_1$ Zahel, 1995   |               |               |               |
| Corriente           | 0.203, 293.6° | 0.509, 200.0° | 0.678, 121.6° |
| Niveles             | 0.615, 327.1° | 1.103, 224.6° | 0.199, 140.0° |
| $O_1$ Modelo actual |               |               |               |
| Corriente           | 0.225, 298.8° | 0.409, 209.7° | 0.644, 123.6° |
| Niveles             | 0.474, 327.7° | 1.153, 219.4° | 0.190, 144.0° |
| $P_1$ Modelo actual |               |               |               |
| Corriente           | 0.175, 280.3° | 0.258, 191.0° | 0.245, 132.0° |
| Niveles             | 0.161, 309.0° | 0.458, 222.6° | 0.044, 46.7°  |
| $Q_1$ Modelo actual |               |               |               |
| Corriente           | 0.049, 306.1° | 0.068, 214.1° | 0.147, 116.7° |
| Niveles             | 0.109, 338.5° | 0.256, 216.7° | 0.073, 128.4° |

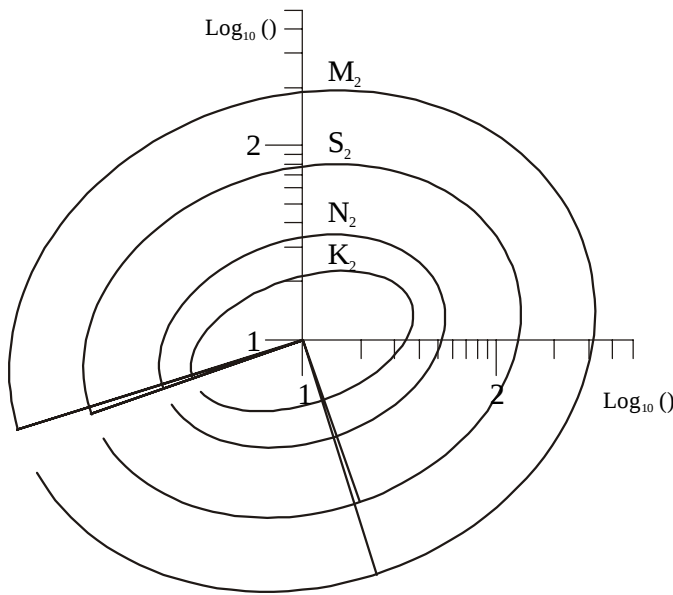
$$p(\sigma) =$$

$$\left( 2.544 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega}{\sigma_f - \sigma} + 2.686 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\sigma_c - \sigma} \right) \frac{M_x^\theta + i M_y^\theta}{A \Omega \tau} + \left( 6.170 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega}{\sigma_f - \sigma} + 1.124 \frac{\Omega}{\sigma_c - \sigma} \right) \frac{M_x^r + i M_y^r}{A \Omega}, \quad (15)$$

que se da y discute en detalle en Gross (1993). En esta ecuación  $p(\sigma) = p(\sigma)_x + i p(\sigma)_y$ , y denota la posición del CEP (Celestial Ephemeris Pole) en un sistema de referencia de mano derecha fijo en una tierra rotando.  $\sigma_f = 1.0023203$  cpsd es la fre-

cuencia de la nutación libre del núcleo,  $\sigma_c$  es la frecuencia de precesión de Chandler,  $\tau = \Omega^2 R_c^5 / (3GA)$ ,  $A$  denota el menor momento principal de inercia. La posición polar referida a CEP se da por medio del movimiento progrado y retrogrado  $\tilde{p}(t) = A_p \exp(i\phi_p) \exp(i\sigma t) + A_r \exp(i\phi_r) \exp(-i\sigma t)$ , con  $\tilde{p}(t) = p(\sigma) \exp(i\sigma t)$  y  $r = A_p + A_r$ ,  $s = A_p - A_r$  los ejes semimayor y semimenor de la elipse descrita por la posición polar.

Generalmente se cumple nuevamente que al incrementar el número de datos asimilados, las razones calculadas de movimiento polar se aproximan significativamente más a las razones observadas. Sin embargo, como el movimiento polar (ver (15)) depende tanto de la componente  $x$  – como de la  $y$  – de momento angular, cambios sistemáticos inducidos por datos, con frecuencia se cancelan parcialmente. Solamente en algunos casos se presentan efectos sistemáticos de los datos en las razones de movimiento polar progrado y retrogrado. Por esta razón no se hará una presentación detallada de estos resultados. El movimiento polar que resulta del modelo actual con asimilación de datos se ilustra en las elipses semidiurnas de la figura 9.



**Figura 9.** Elipses de movimiento polar ocasionadas por las mareas  $M_2$ -,  $S_2$ -,  $N_2$ - y  $K_1$ -. El eje  $x$  está orientado hacia el Meridiano de Greenwich, el eje  $y$   $90^\circ$  al este de Greenwich. La rotación es retrograda (negativa) para cada una de las elipses mostradas.  $1000\mu$  corresponden aproximadamente a 3 cm en la superficie terrestre.

## CONCLUSIONES

El modelo mareográfico con el procedimiento variacional de asimilación de datos presentado produce campos y cantidades integrales de significado geofísico que concuerdan muy bien con los valores observados disponibles. Este modelo se caracteriza por su amplia aplicabilidad, como por ejemplo, al haberse considerado el efecto conjunto total de carga gravitatoria y atracción mutua y al haberse asimilado datos relacionados de

una manera compleja con las variables del modelo. Además, el procedimiento variacional de asimilación de datos usado ha mostrado una excelente eficiencia computacional y permite aplicar el modelo con una considerable alta resolución, como se ha usado hasta ahora. Por otra parte, al incrementar el tamaño del conjunto de datos de asimilación se reduce el tiempo de cómputo, debido al mejoramiento de las propiedades de convergencia del proceso iterativo.

En consecuencia, el estudio realizado sobre el papel que están jugando los residuos dinámicos inducidos por los datos asimilados en la dinámica del modelo se muestra como una buena base que puede usarse hacia la identificación de efectos físicos relevantes que o no son o al menos no son apropiadamente considerados en el modelo de mareas. La débil dependencia en las suposiciones sobre los errores dinámicos en un amplio rango de los valores de los parámetros también constituye un buen punto de partida para investigar el significado de los residuos dinámicos.

La magnitud de los residuos dinámicos comparados con los términos más importantes de la ecuación de momento demuestra que, a pesar de su importancia, los residuos sólo representan una corrección menor de la dinámica mareográfica del modelo. Los máximos de los residuos dinámicos se originan típicamente en zonas de cuasi resonancia. Corrigiendo el comportamiento resonante con datos cuando este comportamiento no es exactamente reproducido por el modelo básico conduce a una mejora particularmente eficiente de los regímenes de marea calculados. Como se ha visto, de esta manera hasta un número bastante restringido de datos puede resultar muy efectivo. Mejoras al incrementar el número de datos asimilados se pueden atribuir principalmente a una mejor cobertura por los datos de regiones específicas de comportamiento cuasiresonante, como indican, por ejemplo los cálculos de las mareas diurnas en el Antártico.

En lo concerniente al carácter físico de los residuos pertenecientes al modelo aplicado, se encuentra que son disipativos, no solamente en la media global sino también para cada uno de los océanos por separado. La contribución de los residuos a las razones totales realistas de disipación de energía son de una magnitud considerable para todas las constituyentes de marea y provienen casi exclusivamente de las áreas oceánicas profundas. En consecuencia, esta contribución pudiera ser interpretada como una representación implícita de mecanismos de disipación de aguas profundas que o no son o al menos no son correctamente incluidos en el modelo. Cuando se evalúa el balance de momento angular se hace evidente que los residuos tienen una estructura diferente a la de los términos clásicos de fricción. Así, al comparar las componentes del balance de momento angular se encuentra que la torca de los residuos dinámicos no puede despreciarse como el de las torcas friccionales.

Como se ha mencionado, el modelo, con su procedimiento de asimilación de datos se considera un instrumento poderoso para producir campos de mareas de cada vez más confiables. Además se puede profundizar más en el entendimiento de las

mejoras inducidas por los datos en los resultados del modelo sobre la base de propiedades ya identificadas de los residuos dinámicos y su relación al comportamiento de oscilación libre del modelo básico. Los cálculos de los parámetros de rotación terrestre que se determinan únicamente por las variables del modelo también muestran claramente mejoras debidas a la asimilación de datos. Las relaciones entre momento angular y parámetros de rotación terrestre involucran cantidades que describen propiedades de la tierra sólida. En consecuencia, cuando también se asimilan parámetros observables de rotación terrestre, se pueden corroborar hipótesis y obtener información sobre la validez y veracidad de estos datos, así como de sus correspondientes interrelaciones, observando cambios en los residuos dinámicos.

## REFERENCIAS

- Accad, Y. and Pekeris, C.L., 1978, Solution of the tidal equations for the  $M_2$  and  $S_2$  tides in the world ocean from a knowledge of the tidal potential alone, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A 290, 235-266.
- Cartwright, D.E., and Ray, R.D., 1991, Energetics of global ocean tides from Geosat altimetry, *Journal of Geophysical Research*, 96, No. C9, 16,897-16,912.
- Chao, B.F., Ray, R.D., Gipson, J.M., Egbert, G.D. and Ma, C., 1996, Diurnal/semidiurnal polar motion excited by oceanic tidal angular momentum, *Journal of Geophysical Research*, 101, No. B9, 20,151-20,163.
- Chao, B.F., and Ray, R.D., 1997, Oceanic tidal angular momentum and Earth's rotation variations, *Progress in Oceanography*, 40, 399-421.
- Eanes, R., and Bettadpur, S., 1995, The CSR3.0 Global ocean tide model, *Center for Space Research, Technical Memorandum CSR-TM-95-06*.
- Egbert, G.D., Bennett, A.F. and Foreman, M.G.G., 1994, TOPEX/POSEIDON tides estimated using a global inverse model, *Journal of Geophysical Research*, 99, No. C12, 24,821-24,852.
- Herring, T.A., and Dong, D., 1994, Measurement of diurnal and semidiurnal rotational variations and tidal parameters of Earth, *Journal of Geophysical Research*, 99, 18,051-18,071.
- Gipson, J.M., 1996, VLBI determination of neglected terms in high-frequency Earth orientation parameter variation, *Journal of Geophysical Research*, 101, 28,051-28,064.
- Gross, R.S., 1993, The effect of ocean tides on the earth's rotation as predicted by the results of an ocean tide model, *Geophysical Research Letters*, 20, No. 4, 293-296.
- Kantha, L.H., 1998, Tides—A Modern Perspective, *Marine Geodesy*, 21, 275-297.
- Le Provost, C., Lyard, F., Molines J.M., Genco, M.L. and Rabilloud, F., 1998, A hydrodynamic ocean tide model improved by assimilating a satellite altimeter-derived data set, *Journal of Geophysical Research*, 103, No. C3, 5513-5529.
- Llubes, M., and Mazzega, P., 1997, Testing recent global ocean tide models with loading gravimetric data, *Progress in Oceanography*, 40, 369-383.
- Scherneck, H.-G., 1990, Loading Green's function for a continental shield with a Q-structure for the mantle and density constraints from the geoid. *Bull. Inform. Marées Terr.*, 108, 7775-7792.
- Schrama, E.J.O., and Ray, R.D., 1994, A preliminary tidal analysis of TOPEX/POSEIDON altimetry, *Journal of Geophysical Research*, 99, No. C12, 24,799-24,808.
- Seiler, U., 1989, An investigation to the tides of the world ocean and their instantaneous angular momentum budgets, *Mitt. Inst. Meereskd.*, 29, 1-104.
- Seiler, U., 1991, Periodic changes of the angular momentum budget due to the tides of the world ocean, *Journal of Geophysical Research*, 96, No. B6, 10,287-10,300.
- Shum, C.K., Woodworth, P.L., Andersen, O.B., Egbert, G.D., Francis, O., King, C., Klosko, S.M., Le Provost, C., Li, X., Molines, J.M., Parke, M.E., Ray, R.D., Schlax, M.G., Stammer, D., Tierney, C.C., Vincent, P. and Wunsch, C.I., 1997, Accuracy assessment of recent ocean tide models, *Journal of Geophysical Research*, 102, No. C11, 25,173-25,194.
- Smithson, M.J., 1992, Pelagic tidal constants 3, *Publ. Sci. Int. Assoc. Phys. Sci. Oceans*, 35, 1-191.
- Sovers, O.J., Jacobs, C.S. and Gross, R.S., 1993, Measuring rapid ocean tidal Earth orientation variations with VLBI, *Journal of Geophysical Research*, 98, 19,959-19,971.
- Zahel, W., 1980, Mathematical modelling of global interaction between ocean tides and earth tides, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 21, 202-217.
- Zahel, W., 1991, Modeling ocean tides with and without assimilating data, *Journal of Geophysical Research*, 96, No. B12, 20,379-20,391.
- Zahel, W., 1995, Assimilating ocean tide determined data into global tidal models, *J. Mar. Systems*, 6, 3-13.
- Zahel, W., 1997, Ocean tides, in: *Tidal Phenomena*, Wilhelm, H., Zuern, W., and Wenzel, G. (eds.), Springer, 113-143.

## APÉNDICE

Como una inversa tridiagonal de ancho de banda 1 corresponde en una dimensión espacial a una matriz de covarianza de errores  $C_1(a)$  determinada por una dependencia exponencial simple de errores  $\overline{\varepsilon_i^T \varepsilon_j^T} = \tilde{\sigma}^2 \exp(-\alpha|i-j|\Delta x)$ , la inversa de esta matriz de covarianza continúa periódicamente en la primera y en la última línea cuando se considera un intervalo periódico. Las componentes diferentes de 0  $a = \tilde{\sigma}^{-2}(1 + \exp(-2\alpha)) / (1 - \exp(-2\alpha))$  en la diagonal principal y  $b = -\tilde{\sigma}^{-2} \exp(-\alpha) / 1 - \exp(-2\alpha)$  en la primer superdiagonal nos llevan a que la parte del funcional que determina el modelo  $\mathbf{r}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}$  es  $\sum_i \mu_0 r_i^* r_i + \sum_i \mu_1 (r_{i+1}^* - r_i^*)(r_{i+1} - r_i)$  con  $\mu_0 = a + 2b$ ,  $\mu_1 = b$

pero  $\mu_0 = a+b$  en una frontera cerrada. Matrices de covarianza más generales se pueden obtener más fácilmente multiplicando matrices básicas  $C_1(\alpha^{(k)})$  entre sí. A tal producto de matrices con  $n$  factores le corresponde una matriz inversa de ancho de banda  $n$  y un funcional de minimización que incluye cuadrados de diferencias residuales de hasta orden  $n$ . Los coeficientes de estas contribuciones dependen de los pertenecientes a las matrices básicas  $(\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)})$  y se pueden obtener evaluando las series de potencias  $\prod_k (\mu_0^{(k)} + \mu_1^{(k)} d_x)$  en términos de las diferencias  $-x$  y agrupando las contribuciones de diferencias de igual orden.

La generalización al espacio bidimensional es inmediata, donde la matriz  $C_2(\alpha)$  resulta de la multiplicación de dos matrices exponenciales del tipo anterior, una refiriéndose a la dirección  $-x$  y la otra a la dirección  $-y$  y produciendo factores  $\mu_0^2, \mu_0 \mu_1, \mu_1 \mu_0, \mu_1^2$  para los cuadrados de los residuos y de sus diferencias  $-x, -y, -xy$ . Igualmente, dependencias más generales expresadas por funciones exponenciales se pueden obtener multiplicando las matrices  $C_2(\alpha)$  entre sí, donde las diferencias y los coeficientes que aparecen se pueden tomar de la evaluación de las series de potencia bidimensionales en términos de las diferencias  $d_x, d_y$ .

Se tomaron en cuenta diferencias de primer y segundo orden de los residuos dinámicos en el funcional de minimización, seleccionando coeficientes de peso tales que la covarianza asignada entre errores dinámicos muestre una dependencia espacial cercana a la de una curva normal y una longitud de decorrelación de aproximadamente  $10^\circ$ . Esta escala de decorrelación corresponde a la dimensión de las cuencas oceánicas más pequeñas que justamente resuelve el modelo. Aplicando procedimientos con escalas de longitud de decorrelación de  $5^\circ$  y  $15^\circ$  se produjeron alteraciones despreciables en las soluciones y en las cantidades que de ellas se derivan.