

VARIACIONES DE TIEMPO DE RECORRIDO EN UN MEDIO UNIDIMENSIONAL CON VELOCIDAD ESTOCÁSTICAMENTE HETEROGÉNEA: UN EFECTO CONTRAINTUITIVO

F. Alejandro Nava Pichardo

Depto. de Sismología, CICESE, Ensenada, B.C., México

fnav@cicese.mx

RESUMEN

Variaciones aleatorias pequeñas en la velocidad de propagación en un medio unidimensional, que siguen alguna distribución probabilística con media nula, influyen en los tiempos de recorrido de los rayos sísmicos en forma un tanto contraintuitiva. En el caso unidimensional, la distribución de las variaciones en estos tiempos es, como se esperaría intuitivamente, similar a la de las variaciones de velocidad de propagación, pero tiene menor desviación estándar y media mayor que cero, de manera que la velocidad aparente presenta un retraso medio que puede ser significativo. Se presenta un ejemplo numérico y la justificación matemática de dichos efectos, así como una explicación de por qué estos efectos son contrarios a algunos resultados obtenidos para medios multidimensionales.

Palabras clave: Tiempos de recorrido, medios con velocidad aleatoria.

ABSTRACT

Small random variations in the propagation velocity within a one-dimensional medium, that follow some probabilistic distribution with zero mean, influence the travel times of seismic rays in a somewhat counterintuitive way. The distribution of the variations in these times is, as would be intuitively expected, similar to that of the velocity variations, but has a smaller standard deviation, and a non-zero, positive, mean, so that the apparent velocity features a mean delay which can be significant. A numerical example and the mathematical justification of these effects are presented, as well as an explanation of why these effects are contrary to some results obtained for multidimensional media.

Key words: Travel times, random velocity media.

INTRODUCCIÓN

En estudios de distribuciones hipocentrales que relacionan las distancias entre posibles fuentes de información y sitios receptores de ésta con los correspondientes tiempos de recorrido, mediante la suposición o búsqueda de una velocidad de propagación dada, es importante estimar el efecto de variaciones en dicha velocidad sobre los tiempos de recorrido.

Si el medio de propagación es geológicamente homogéneo con una velocidad promedio característica, podemos esperar intuitivamente que, de punto a punto, la velocidad local varíe alrededor de dicha velocidad característica con variaciones aleatorias, pequeñas en su gran mayoría y con media muy pequeña o nula.

En ese caso, podemos esperar, intuitivamente, que los tiempos de recorrido varíen de manera estadísticamente correspondiente a las variaciones; esto es, que, para una distancia dada, los tiempos sean tales que las velocidades aparentes obtenidas de dividir la distancia entre éstos, se distribuyan de la misma forma que las variaciones de velocidad, con las mismas media y desviación estándar.

Veremos, mediante un experimento numérico, que el efecto de las variaciones de velocidad mencionadas no corresponde al intuitivo para un medio unidimensional; en particular, la velocidad promedio presenta un corrimiento que la hace más lenta.

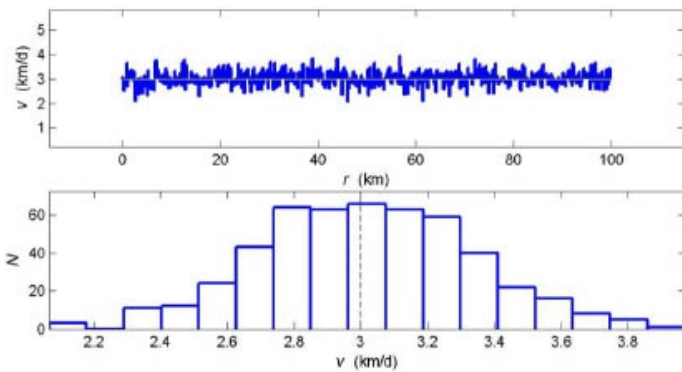


Figura 1. Ejemplo de variación de velocidad a lo largo de un rayo (arriba) y el histograma correspondiente (abajo). Puede apreciarse que el histograma refleja la distribución normal utilizada para generar las variaciones.

El efecto de variaciones aleatorias de velocidad en medios bi- y tridimensionales ha sido ampliamente estudiado (e.g. Chernov, 1960) y los estudios han encontrado un corrimiento en la velocidad aparente promedio. Sin embargo, para altas frecuencias, este corrimiento es hacia mayores velocidades, en contra de lo observado en el caso unidimensional.

Presentaremos la justificación matemática del corrimiento de velocidad en el medio unidimensional y una explicación de la aparente contradicción en signo con los corrimientos en medios de más dimensiones.

EL EXPERIMENTO NUMÉRICO Y SU EXPLICACIÓN MATEMÁTICA

Supongamos una señal sísmica que se propaga de fuente a receptor a través de una distancia r con velocidad v ; el tiempo que tarda en hacerlo es

$$t_0 = \frac{r}{v} \tag{1}$$

donde el subíndice cero indica que la velocidad no varía.

Consideremos ahora la distancia dividida en n intervalos y supongámoslos iguales para facilitar esta exposición (el efecto es el mismo si los consideramos desiguales), de manera que

$$r = n \Delta r \tag{2}$$

y supongamos que la velocidad varía cada intervalo Δr :

Para un intervalo cualquiera $\Delta r_i = \Delta r$, la velocidad está dada por $v + \delta v_i$, donde δv_i es la variación aleatoria; la velocidad media a lo largo de r es

$$v_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v + \delta v_i) \tag{3}$$

y el tiempo de recorrido, está dado por

$$t = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta r}{v + \delta v_i} \tag{4}$$

Es de esperarse que las variaciones de velocidad sean debidas a la suma de efectos de una variedad de causas, por lo que una distribución normal puede ser adecuada para modelar dichas variaciones. Vamos a hacer el experimento numérico generando variaciones aleatorias de velocidad distribuidas normalmente con media cero, pero los efectos descritos no dependen de la distribución particular usada, siempre que ésta sea unimodal y tenga media cero.

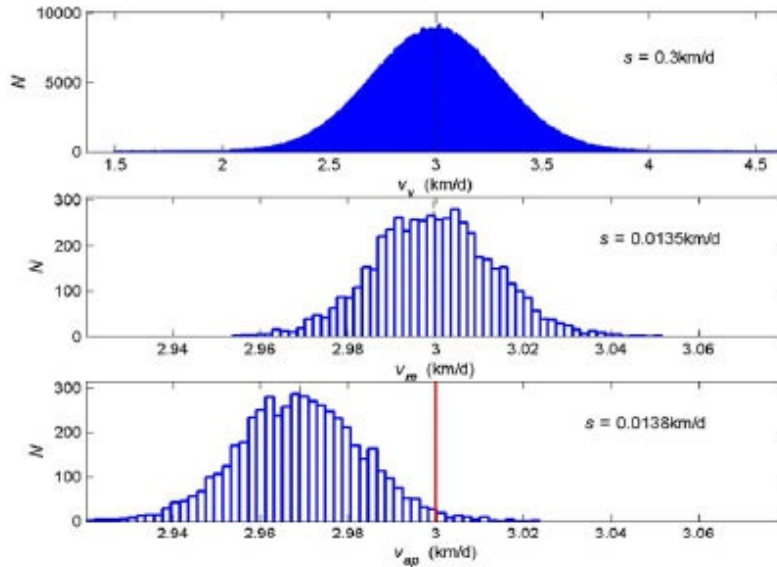


Figura 2. Histograma de las 2,500,000 velocidades generadas (arriba), de las 5,000 velocidades medias a lo largo de cada rayo (centro) y de las velocidades aparentes (abajo). En todas, la línea vertical discontinua indica el valor medio y la línea vertical gruesa indica el valor de $v = 3 \text{ km/d}$ y $r = 100 \text{ km}$

Consideremos $v=3 \text{ km/d}$ y $r= 100 \text{ km}$, de manera que $t_0 = 33.3\bar{3}\text{d}$. La Figura 1 muestra un ejemplo de la variación de la velocidad para $\Delta r = 0.2\text{km}$ y $n=500$, con δv aleatorio distribuido normalmente con desviación estándar $\sigma_v = 0.1 v = 0.3 \text{ km/d}$

Generamos $m=5,000$ rayos, evaluando para cada uno la velocidad media v_m y el tiempo t , según las ecuaciones (3) y (4). A partir de cada t , calculamos la velocidad aparente

$$v_{ap} = \frac{r}{t} = \frac{r}{t_0 + \delta t} \quad (5)$$

y la distancia aparente

$$r_{ap} = v t = r + v \delta t \quad (6)$$

La Figura 2 muestra, en su cuadro superior, el histograma de las velocidades generadas, que refleja de manera muy convincente la distribución normal usada; la desviación estándar medida δv concuerda muy bien con σ_v .

El histograma de los tiempos t calculados para dichas velocidades se muestra en la Figura 3 (arriba); es en esta figura donde se observa que no se cumplen las predicciones intuitivas:

la distribución sí parece ser normal, pero su valor medio difiere de t_0 por $\delta t = 0.3429\text{d}$ ($\sim 1\%$) y su desviación estándar medida $s_t = 0.1532 \text{ d}$ es mucho menor que la correspondiente a la de v ; corresponde más bien a la de v_m , cuyo histograma se muestra en la Figura 2 (en medio) y cuya $S_{v_m} = 0.0135$ (nótese la diferencia en la extensión de los correspondientes ejes de abscisas). Este último punto es muy fácil de explicar; cada t corresponde a una v_m que es una media de n elementos de v , y es bien sabido que la desviación estándar de estas medias es

$$\sigma_{v_m} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

El corrimiento del tiempo medio y los correspondientes corrimientos de r_{ap} y v_{ap} son debidos a que las variaciones de velocidad aparecen en el denominador, y no en el numerador, de la ecuación (4). Efectivamente, podemos expresar esta ecuación como

$$t = \frac{\Delta r}{v} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\delta v_i}{v}}$$

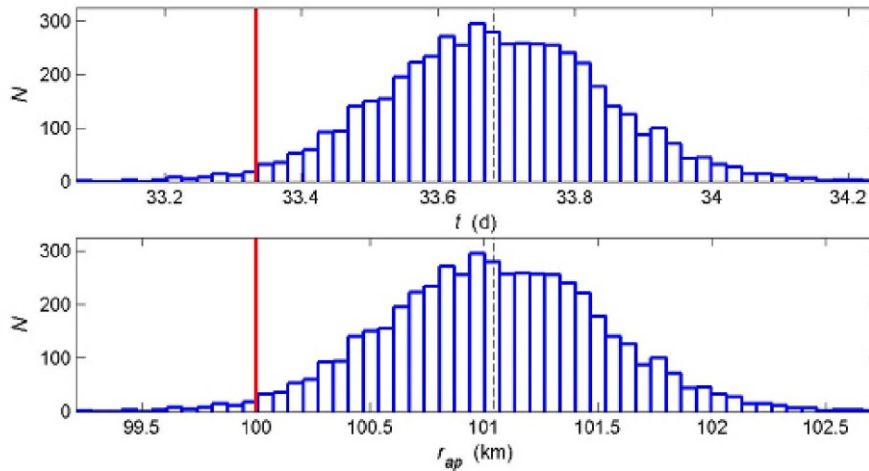


Figura 3. Histogramas de t (arriba) y de r_{ap} (abajo); en ambos la línea vertical discontinua indica el valor medio de la distribución y la línea continua gruesa indica los valores para v invariable, t_0 y r , respectivamente.

y desarrollar el denominador como serie, seguros de que converge pues el término $\delta v_j / v$ es menor que la unidad, de manera que

$$t = \frac{\Delta r}{v} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{\delta v_i}{v} + \left(\frac{\delta v_i}{v}\right)^2 - \left(\frac{\delta v_i}{v}\right)^3 + \dots \right] = t_0 + \delta t \quad (8)$$

donde

$$\delta t = \frac{\Delta r}{v} \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\delta v_i}{v} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta v_i}{v}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta v_i}{v}\right)^3 + \dots \right] \quad (9)$$

Ya que las variaciones δv_i son aleatorias y, con igual probabilidad, positivas o negativas, los términos de sumatorias con potencias impares de la ecuación (9) son muy pequeños o nulos (el primer término es nulo por definición), mientras que aquellos con potencias pares, siempre positivas, sí contribuyen al valor absoluto de δt . En la práctica, este valor está dominado por la sumatoria de términos cuadráticos y puede estimarse, *grosso modo*, como

$$\delta t \approx \frac{\Delta r}{v} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta v_i}{v}\right)^2 \approx \frac{\Delta r}{v^3} \sum_{i=1}^n (\delta v_i)^2 \approx \frac{\Delta r}{v^3} \sigma_v^2 (n-1) \quad (10)$$

¿Qué tan importante es el efecto de la variación de la velocidad? El valor medio de t depende, naturalmente, de σ_v y de la distancia r que recorre el rayo; el tamaño de Δr influye solamente sobre la desviación estándar de t . La Figura 4 ilustra, para $v = 3 \text{ km/dy}$ y $\Delta r = 0.2 \text{ km}$, la diferencia entre el tiempo t_0 y el valor medio de t , así como la desviación estándar de éste para diferentes distancias y dos valores de σ_v . Puede verse que el efecto de dicha variación puede ser significativo a largas distancias, aún para variaciones pequeñas de la velocidad ($\sim 0.01 v$), y ser bastante considerable para variaciones grandes ($\sim 0.10 v$); en ambos casos, para las distancias mostradas, la diferencia en tiempos sobrepasa una desviación estándar (dos para variaciones grandes).

Mencionaremos, de paso, que para el caso de velocidad de tipo difusivo, donde

$$t_0 = \frac{r^2}{v} ,$$

un análisis similar al caso elástico discutido arriba indica que existe también aumento en los tiempos de recorrido, dado por

$$\delta t = 2 \sqrt{t_0} \sqrt{\theta} + \theta$$

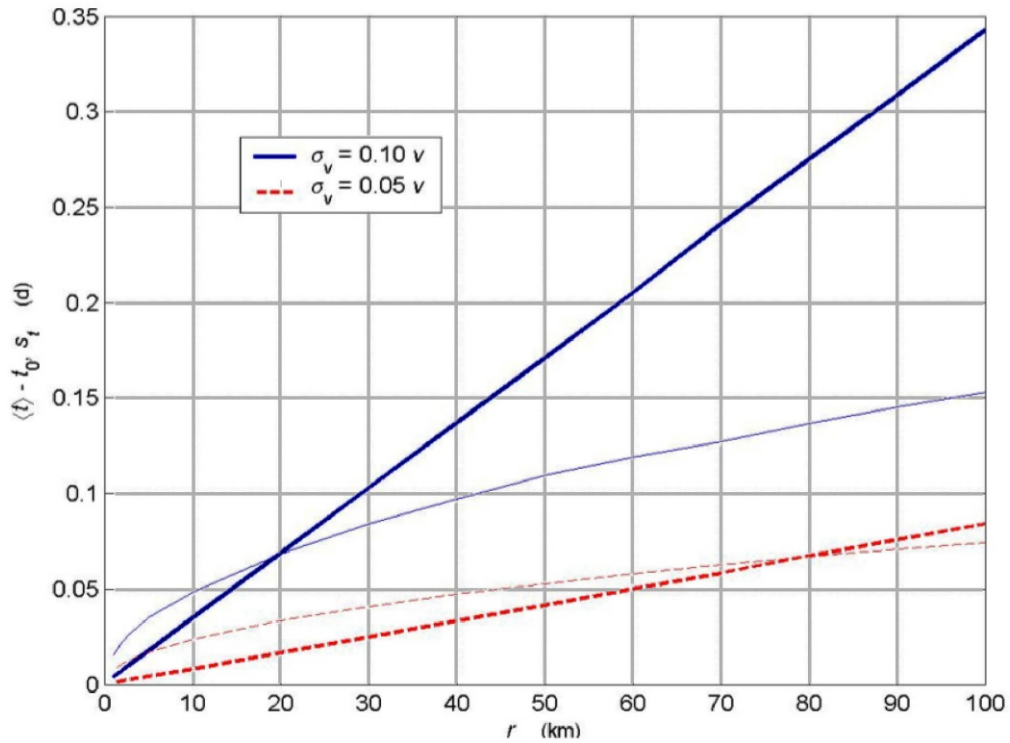


Figura 4. Diferencia entre t_0 y t media (líneas gruesas) y desviación estándar de t (líneas delgadas), como funciones de la distancia, para $v=3$ km/d y $\Delta r = 0.2$ km.

donde

$$\sqrt{\theta} = \frac{\Delta r}{\sqrt{v}} \left[-0.5 \sum_{i=1}^n \frac{\delta v_i}{v} + 0.375 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta v_i}{v} \right)^2 - 0.3125 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta v_i}{v} \right)^3 + \dots \right]$$

EL CASO MULTIDIMENSIONAL

Los tiempos de recorrido en medios con velocidades que varían en forma aleatoria han sido ampliamente estudiados, tanto desde el punto de vista teórico, usualmente en el límite de altas frecuencias (e.g. Chernov, 1960; Samuelides, 1998), como numéricamente, mediante métodos de diferencias finitas (e.g. Frankel y Clayton, 1990; Müller et al., 1992). El corrimiento de velocidad ha sido ampliamente reconocido; sin embargo, los métodos basados en aproximaciones de rayos obtienen corrimientos hacia velocidades ¡más altas!

La explicación es sugerida por dos factores. El primero es que el corrimiento de la velocidad aumenta con la longitud de la trayectoria (Samuelides, 1998). El segundo, que el corrimiento es función de la frecuencia; la velocidad aparente es mayor para frecuencias más altas, y decrece conforme baja la frecuencia hasta alcanzar un corrimiento negativo para frecuencias muy bajas (Müller et al., 1992, Roth et al., 1993). Müller et al. (1992) mencionan que Wielandt (1987) encontró que en un medio con inclusiones de baja velocidad, las ondas se difractan alrededor de estas inclusiones.

Es el mismo mecanismo por el cual una onda críticamente refractada P_n puede viajar más rápido que una onda directa P_g , a pesar de recorrer un camino más largo.

Podemos considerar a un medio con variaciones de velocidad aleatorias como un medio con inclusiones tanto más rápidas como más lentas. Las altas frecuencias, cuyas longitudes de onda son pequeñas, pueden difractarse aprovechando las inclusiones de alta velocidad y, mientras mayor es el trayecto, más tiempo pueden ahorrar que si siguieran una trayectoria directa pasando igualmente por zonas de velocidad intermedia y baja. Conforme baja la frecuencia y las longitudes de onda aumentan, el trayecto es menos versátil, hasta llegar al límite en que la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño de las inclusiones (la escala a la cual varía aleatoriamente la velocidad del medio) y la trayectoria entre dos puntos ya no puede variar, de manera que la onda viaja a través de (muestrea) velocidades con todas las variaciones. Para un medio unidimensional la trayectoria no puede variar; por eso, independientemente de la frecuencia, la onda muestrea todas las velocidades como en el ejemplo mostrado antes.

CONCLUSIONES

Las variaciones en tiempo de viaje de un rayo sísmico causadas por variaciones aleatorias de velocidad con medias nulas a lo largo del recorrido, causan cambios en los tiempos de recorrido cuyos valores medios, no sólo son distintos de cero, sino que pueden alcanzar valores significativos. Para medios unidimensionales o para el límite de bajas frecuencias en medios multidimensionales, predominan los retrasos, de manera que las velocidades aparentes son menores, mientras que para altas frecuencias en medios multidimensionales predominan los adelantos.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Juan Antonio Madrid por sus comentarios y a Miguel Rodríguez por su acertada y constructiva crítica..

REFERENCIA

- Chernov, L. (1960) *Wave propagation in a random medium*. McGraw-Hill, USA.
- Müller, G., Roth, M., & Korn, M. (1992) Seismic-wave traveltimes in random media. *Geophys.J. Int.* 110, 29-41.
- Roth, M., Müller, G., & Schneider (1993) Velocity shift in random media. *Geophys.J. Int.* 115, 552-563.
- Samuelides, Y. (1998) Velocity shift using the Rytov approximation. *J. Acoust. Soc. Am.* 104, 2596-2603.
- Wielandt, E. (1987) On the validity of ray approximation for interpreting delay times. En *Seismic Tomography*, Nolet, G. (Ed), Reidel, Holanda [Citado en Müller *et al.*, 1992].

Manuscrito recibido: 11 de octubre de 2006

Manuscrito aceptado: 5 de julio de 2007